

一、引言和背景

学习主要的参考文献为：A quantum engineer's guide to superconducting qubits，作者是 Krantz，2019 年 6 月发表于《Applied Physics Reviews》，这个期刊影响因子11.9，是1区期刊。还是比较有读的价值。

这篇学习，即：《量子工程师的超导量子比特入门指南的理解与解读》是我9月份和国庆中秋期间整理的，耗时1个月。文章是全文的，有50多页，读下来需要较长的时间，这篇解读应该能帮助节约时间。

读前声明

本篇解读均为个人理解，可能会有偏差或不全面的地方，实际要以参考文献A quantum engineer's guide to superconducting qubits为准。全文2W字，预计2~4h读完。

A.文章组织安排

1.文章目的

近年来，超导量子比特从基础研究转向规模化量子系统工程，形成了一个“量子工程”交叉学科，不同领域的人参与到量子领域。为了帮刚进入量子领域的工程师扫盲一些量子基础的概念和原理，了解最新的科研进展，作者才写了这篇文章作为一个入门手册。

2.结构安排

分成了四大模块展开讲，和我们实验室比较相关的是量子比特控制和读出，重点看四五章。文章结构如下。



二、量子电路工程

(从量子谐振子到 Transmon、Flux qubit 等比特设计，电容 / 电感耦合机制)

A.从经典电路到超导量子比特

要做量子比特，首先得有一个能稳定存储量子态的电路。文章从最基础的LC 谐振电路入手，一步步改造成了现在常用的transmon 量子比特。

科学家是怎么实现量子比特的？

现阶段实现量子比特的方法有很多e.g., electron spins in silicon and quantum dots, trapped ions, ultracold atoms, nitrogen-vacancies in diamonds, and polarized photons, where the quantum information is encoded in natural microscopic quantum systems,但超导量子比特很有优势：superconducting qubits are macroscopic in size and lithographically defined。所以文章着重介绍超导量子比特的实现

1. LC 电路到量子谐振子（QHO）

怎么把量子比特电路化？ 用经典 LC 电路模拟。

可以用**并联 LC 谐振电路**去模拟量子比特的性质，这种电路的能量会在电容的电场和电感的磁场间来回振荡，存在和量子比特类似的性质，电路结构如下图的(a)，但经典 LC 电路不能当量子比特，因为量子比特需要两个可区分的量子态（ $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ），而经典 LC 电路的能量是连续的。如果把它进行量子化，能量不再连续，而是分成一个个能级，相邻能级的间距完全相等（ $\Delta E = \hbar\omega$ ， \hbar 是量子常数， ω 是振荡频率），就能变成量子谐振子（QHO）（能级结构对应图 1b）

QHO有个致命问题，导致根本没法用，这个问题就是**能级等间距**（图 1b），给他一个“ $0 \rightarrow 1$ ”跃迁的微波脉冲，会同时激发“ $1 \rightarrow 2$ ”跃迁，所以还不能直接作为量子比特用。（量子比特只能在0和1之间跳动，不能跳到其他能级去）

2.约瑟夫森结

要使让电路只能在从0到1之间跳动，要引入**非线性元件**—约瑟夫森结。约瑟夫森结制备是用两块超导体夹一片绝缘体（SIS结构），用这个器件代替电路中的电感（如图1c），就能够产生**非简谐能级**（能级间距随能级升高而减小，图1d），使“ $0 \rightarrow 1$ ”和“ $1 \rightarrow 2$ ”跃迁可区分。

现在，我们初步得到了一个电路形态的量子比特，（制造了一个宏观的人造原子）。

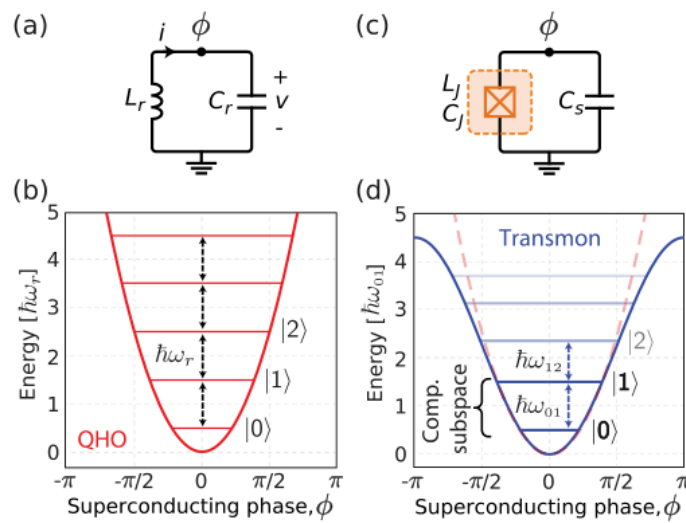


FIG. 1. (a) Circuit for a parallel LC-oscillator (quantum harmonic oscillator, QHO), with inductance L in parallel with capacitance, C . The superconducting phase on the island is denoted as ϕ , referencing the ground as zero. (b) Energy potential for the QHO, where energy levels are equidistantly spaced $\hbar\omega_r$ apart. (c) Josephson qubit circuit, where the nonlinear inductance L_J (represented by the Josephson-subcircuit in the dashed orange box) is shunted by a capacitance, C_s . (d) The Josephson inductance reshapes the quadratic energy potential (dashed red) into sinusoidal (solid blue), which yields nonequidistant energy levels. This allows us to isolate the two lowest energy levels $|0\rangle$ and $|1\rangle$, forming a computational subspace with an energy separation $\hbar\omega_{01}$, which is different than $\hbar\omega_{12}$.

约瑟夫森结的非线性让电路的势能从抛物线变成正弦曲线,产生能级差距,进而使“0→1”和“1→2”跃迁可区分。

3.transmon

上面的量子比特很敏感,一点电荷噪声就会让比特能级乱晃,存的信息一下就没s了(相干时间非常短)。所以需要给他进行抗电荷噪声设计。科学家发现在约瑟夫森结旁边并联一个超大电容(比结本身的电容大很多)就能让电路对电荷波动的敏感度会指数级下降,相干时间大大延长,所以实用量子比特就造出来了,科学家给它起名字叫transmon。

至于为什么并电容就能抗电荷噪声,文章里有很多公式。不过最后的结论就是:在 $E_J \gg E_C$ 的情况下, (E_J/E_C) 很大,电荷噪声对能级的影响呈指数抑制,磁通噪声的敏感性也可控,所以transmon 才能成为主流量子比特。

transmon的特点

1. **频率合适**: 工作频率在 3-6GHz, 刚好能用现代的微波技术控制, 不用搞特殊设备;
2. **抗干扰强**: 不怕电荷噪声, 能稳定工作(相干时间能到 100 微秒以上,100微秒够咱fpga做很多事情了);
3. **非简谐够用**: 虽然非简谐性不算特别大(100-300MHz), 但足够防止误跳能级了。

B、量子比特的优化

B部分讲量子比特的发展, 通过优化结构, 让其能够调节频率、获得更好的性能。

transmon 比特虽然好用, 但不同场景需要不同特性的比特, 有些场景需要能调频率的比特, 有些需要更高非谐性的比特。

transmon的发展与优化

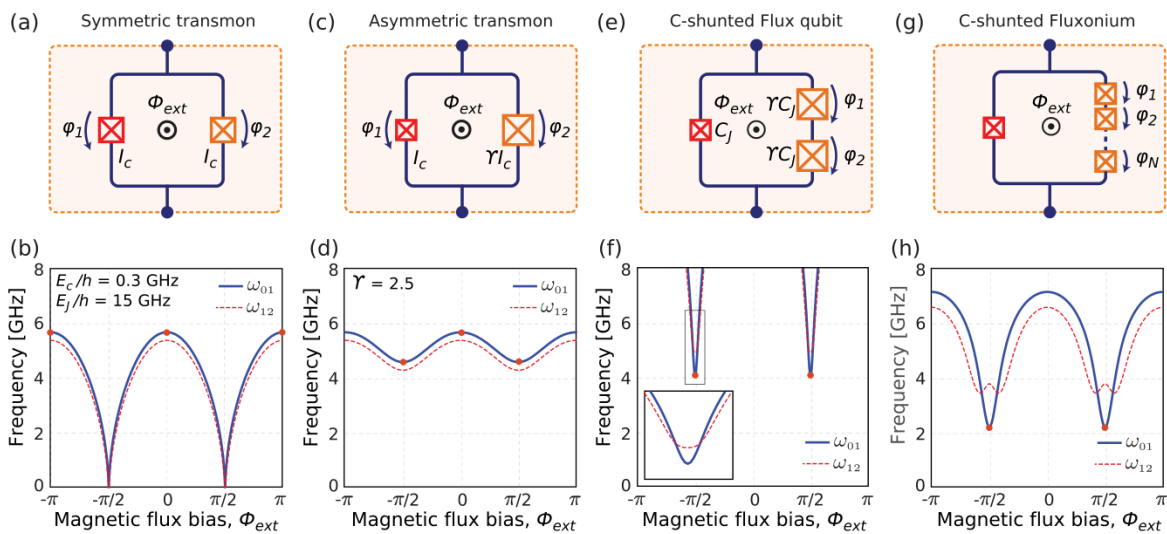


FIG. 2. Modular qubit circuit representations for capacitively shunted qubit modalities [orange box Fig. 1(c)] and the corresponding qubit transition frequencies for the two lowest energy states as a function of the applied magnetic flux in units of Φ_0 . (a) and (b) Symmetric transmon qubit, with Josephson energy E_J is shunted with a capacitor yielding a charging energy E_C . (c) and (d) Asymmetric transmon qubit, with junction asymmetry $\gamma = E_{J2}/E_{J1} = 2.5$. (e) and (f) Capacitively shunted flux qubit, where a small principle junction (red) is shunted with two larger junctions (orange). Parameters are the same as Yan *et al.*⁶² (g) and (h) C-shunted fluxonium qubit, where the small junction is inductively shunted with a large array of N junctions.

上排是优化后的电路结构，图2a，图2c，图2e，图g，分别是Split Transmon，不对称 Split Transmon，Flux Qubit 和 Fluxonium的部分电路图，

每个图对应的下排图的简单解读如下

横轴是外部磁通偏置(Φ_{ext}) (以磁通量子(Φ_0)为单位，范围 $(-\pi)$ 到 (π))，纵轴是跃迁频率 (GHz)。蓝色线为 (ω_{01}) (基态 $|0\rangle \rightarrow$ 第一激发态 $|1\rangle$)的频率，红色虚线为 (ω_{12}) ($|1\rangle \rightarrow |2\rangle$)的频率，两者的差值就是非简谐性($\alpha = \omega_{12} - \omega_{01}$)，决定比特是否容易“误跳到高能级”。曲线平缓段多，代表对磁通噪声不敏感，相干时间长。

1.Split Transmon

图2a，Transmon 的频率是固定的，做量子计算时，经常需要两个比特对话——比如让比特 A 和比特 B 的频率对齐（如实现两比特门），能调频率的 Split Transmon 就派上用场了。原来的 Transmon 用一个约瑟夫森结，Split Transmon 把这结换成了“两个结组成的环路”（叫 DC-SQUID，如图（2a））。加外部磁场（磁通），就能改变两个结的有效约瑟夫森能量，进而改变比特的频率。加不同的磁通，就能让比特工作在不同频率（调谐范围通常有 1GHz）。

(图2b) 对称 Transmon 的频率曲线

曲线呈**对称的碗状**：当 $(\Phi_{\text{ext}} = 0)$ 时，频率最高；偏离 0 时，频率下降。非简谐性为负($\omega_{12} < \omega_{01}$)，且 $(\Phi_{\text{ext}} = 0)$ 时非简谐性的绝对值较小——这意味着“0 \rightarrow 1”和“1 \rightarrow 2”跃迁容易混淆，需额外技术（如 DRAG 脉冲）抑制高能级泄漏。

2.不对称 Split Transmon

图2c,早期的 Split Transmon 有个问题：调频率的时候，特别怕 磁通噪声，解决办法就是：把两个结做不一样大（不对称），这样磁通噪声对频率的影响会大大降低。

(图2d) 不对称 Split Transmon 的频率曲线

因结不对称($\gamma = 2.5$)，曲线**不再严格对称**，且“碗状”更平缓。此时，磁通偏置对频率的影响变弱，说明**抗磁通噪声能力提升**（即使磁通有波动，频率也不易乱晃），同时仍保留一定调谐范围。

Flux Qubit 和 Fluxonium

Transmon 虽然好用，但非简谐性不算特别大，有时候还是会不小心跳到 $|2\rangle$ 态。如果想让比特更可靠，就需要非简谐性更大的设计——Flux Qubit（磁通比特）和 Fluxonium（这东西居然没有中文翻译）

3. Flux Qubit

图2e, Flux Qubit是非简谐性变正的比特

普通 Transmon 的非简谐性是“负的” ($|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 比 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ 容易), 相当于二楼到三楼的台阶比一楼到二楼的低, 在一、二楼之间跳可能会不小心跳到三楼。

但是 Flux Qubit 的非简谐性是“正的” ($|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 比 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ 难), 相当于二楼到三楼的台阶比一楼到二楼的高很多, 所以只能在一楼和二楼之间跳。

它的电路设计方法是: 用 3 个或 4 个约瑟夫森结组成一个小环路, 让势能曲线变成双阱, 比特的态能在两个陷之间稳定切换, 不容易跑到更高的能级。

(图2f) Flux Qubit的频率曲线

左侧放大图显示: 在特定磁通偏置下 (如 $-\pi/2$ 附近), ω_{01} 有很深的“谷”, 而 ω_{12} 的“谷”更浅, 非简谐性为正 $\omega_{12} > \omega_{01}$ —— 这意味着“ $1 \rightarrow 2$ ”比“ $0 \rightarrow 1$ ”更难发生, 能更严格限制在两能级, 适合对“非简谐性要求极高”的场景。

4. Fluxonium

图2g, Fluxonium 是 Flux Qubit 的升级版, 记得久的比特 (相干时间长), 方法: 用很多个约瑟夫森结 (比如 100 个) 组成“结阵列”,

它有两个优势:

1. **相干时间长**: 能稳定保存信息到“毫秒级”, 比 Transmon 长得多。
2. **非简谐性超大**: 几乎不会跳到 $|2\rangle$ 态。

缺点是: 设计复杂, 成本高, 目前主要用在对相干时间要求高的场景 (比如量子存储器)

(图2h) Fluxonium的频率曲线

曲线呈现**宽而深的“碗状”**, 且 ω_{12} 与 ω_{01} 差距很大 (非简谐性负且绝对值大)。这说明: ① 频率可调范围大; ② 高能级泄漏极难发生; ③ 对磁通噪声不敏感 (曲线平缓段多), 因此**相干时间长** (信息能保存更久)。

C、量子比特相互作用

量子比特之间怎么通信与协调的?

单个比特再好用, 也做不了计算—得让比特之间能产生纠缠, 这就需要耦合, 第二章主要讲了两种: 电容耦合和电感耦合。

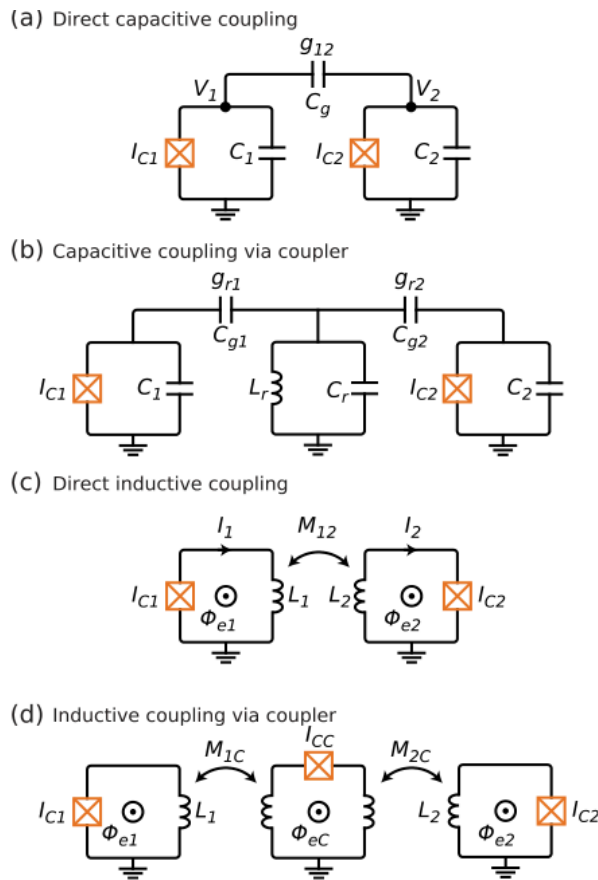


FIG. 3. Schematic of capacitive and inductive coupling schemes between two superconducting qubits, labeled 1 and 2. (a) Direct capacitive coupling, where the voltage nodes of two qubits V_1 and V_2 are connected by a capacitance C_g . (b) Capacitive coupling via a coupler in the form of a linear resonator. (c) Direct inductive coupling, where the two qubits are coupled via mutual inductance, M_{12} . (d) Inductive coupling via mutual inductances M_{1C} and M_{2C} to a frequency-tunable coupler.

1.电容耦合---电场

在两个比特的电容板之间再放一个小电容（叫耦合电容），用电场传递信号。

作用：能让两个比特交换状态，比如比特 A 是 $|1\rangle$ 、比特 B 是 $|0\rangle$ ，耦合后后变成 A 是 $|0\rangle$ 、B 是 $|1\rangle$ ，交换后就能产生纠缠效应—实现纠缠门（iSWAP 门）的基础。

(a) 直接电容耦合（Direct capacitive coupling）

- 结构：两个量子比特的电压节点（ V_1 和 V_2 ）之间，直接接一个耦合电容(C_g)。
- 效果：一个比特的电荷波动（电压变化）会通过(C_g)的电场，传递给另一个比特，实现比特间的相互作用。

(b) 通过耦合器的电容耦合（Capacitive coupling via coupler）

- 结构：两个比特不直接相连，而是分别通过耦合电容连接到一个线性谐振器。
- 优势：可通过调节谐振器的参数，灵活控制两个比特的耦合强度，还能让原本距离远的比特也实现耦合。

2.电感耦合---磁场

让两个比特的环路靠得近一点，用磁场传递信号；

作用：不交换状态，只给两个比特都为 $|1\rangle$ 的情况加个相位），比如两个比特都是 $|1\rangle$ ，交流后会多一个 π 相位。不改变他们的状态，但改变相位。

(c) 直接电感耦合（Direct inductive coupling）

- 结构：两个量子比特的超导环路（电感 L_1 、 L_2 之间，通过互感 M_{12} 耦合。电流 I_1 、 I_2 、 ϕ_{e1} 、 ϕ_{e2} 是会影响耦合。
- 效果：一个比特的电流波动”（磁场变化）会通过 M_{12} 的磁场，传递给另一个比特，实现相互作用。

(d) 通过耦合器的电感耦合（Inductive coupling via coupler）

- 结构：两个比特通过中间耦合器（带约瑟夫森结 I_{cc} 和外部磁通 ϕ_{eC} 间接连接，利用互感 M_{1C} 、 M_{2C} 传递磁场作用。
- 优势：耦合器的频率可调节，能灵活开关或调整两个比特的耦合强度，适配不同的量子操作需求。

小结

1. 普通量子谐振子能级等间距，容易跳错→解决：加约瑟夫森结，造非简谐。
2. 早期比特怕电荷噪声→解决：Transmon 加超大电容，抗干扰。
3. 比特频率固定，不能对话→解决：Split Transmon 用 DC-SQUID，能调频率。
4. Transmon 非简谐不够，容易跳级→解决：Flux 系列用多结，非简谐更大。
5. 比特之间不能交流→解决：电容 / 电感耦合。

三、噪声与退相干

（系统 / 随机噪声分类，Bloch-Redfield 模型， $1/f$ 噪声等常见噪声源及动态解耦等 mitigation 技术）

核心问题：为什么量子比特这么敏感，如何增加相干时间。

A. 噪声的类型

A. Types of noise （噪声有哪些）

1. 系统噪声（Systematic noise）：比如给 qubit 发一个让它转 180° 的微波脉冲，但脉冲强度没调好，实际只转了 178° ，每次都差 2° 。能校准！
2. 随机噪声（Stochastic noise）：控制线路里的电阻发热，产生约翰逊噪声（电压随机跳）。或 qubit 周围的电路表面有小电荷陷阱，电荷偶尔跳一下，导致 qubit 频率乱飘；每次不一样，难校准！要抗干扰设计或动态抵消。
3. 噪声强度 & qubit 敏感度：噪声强度：干扰的大小。qubit 敏感度：qubit 对某种噪声的抵抗力。

B. 噪声和退相干建模

B. Modeling noise and decoherence （噪声是怎么影响qubit的）

主要讲了：用Bloch 球和 Bloch-Redfield 模型，解释噪声怎么让 qubit 丢信息。

1. 布洛赫球

北极：qubit 的“0 态” ($|0\rangle$) ;南极：qubit 的“1 态” ($|1\rangle$)

赤道：qubit 的“叠加态”，比如“一半停止、一半前进”($\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$);

球表面 纯态，qubit 的状态很明确。球内部：混合态，qubit 的状态模糊了，比如球中心（完全不知道是 $|0\rangle$ 还是 $|1\rangle$ ），这就是噪声导致的退相干

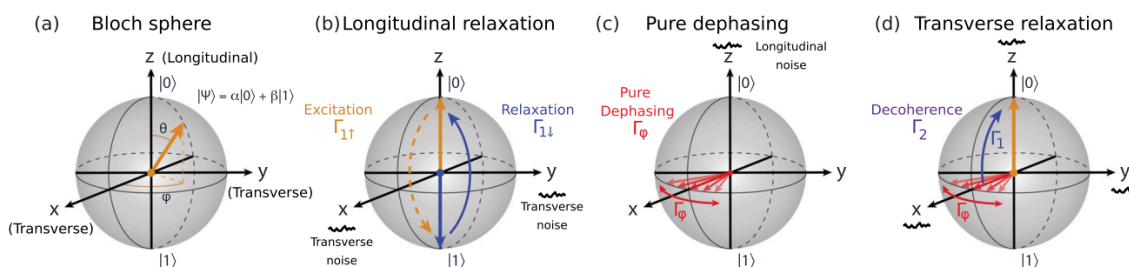


FIG. 4. Transverse and longitudinal noise represented on the Bloch sphere. (a) Bloch sphere representation of the quantum state $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. The qubit quantization axis—the z axis—is “longitudinal” in the qubit frame, corresponding to σ_z terms in the qubit Hamiltonian. The x - y plane is “transverse” in the qubit frame, corresponding to σ_x and σ_y terms in the qubit Hamiltonian. (b) Longitudinal relaxation results from the energy exchange between the qubit and its environment, due to transverse noise that couples to the qubit in the x - y plane and drives transitions $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. A qubit in-state $|1\rangle$ emits energy to the environment and relaxes to $|0\rangle$ with a rate $\Gamma_{1\downarrow}$ (blue arched arrow). Similarly, a qubit in-state $|0\rangle$ absorbs energy from the environment, exciting it to $|1\rangle$ with a rate $\Gamma_{1\uparrow}$ (orange arched arrow). In the typical operating regime $k_B T \ll \hbar\omega_q$, the up-rate is suppressed, leading to the overall decay rate $\Gamma_1 \approx \Gamma_{1\downarrow}$. (c) Pure dephasing in the transverse plane arises from longitudinal noise along the z axis that fluctuates the qubit frequency. A Bloch vector along the x -axis will diffuse clockwise or counterclockwise around the equator due to the stochastic frequency fluctuations, depolarizing the azimuthal phase with a rate Γ_ϕ . (d) Transverse relaxation results in a loss of coherence at a rate $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_\phi$, due to a combination of energy relaxation and pure dephasing. Pure dephasing leads to decoherence of the quantum state $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$, initially pointed along the x -axis. Additionally, the excited state component of the superposition state may relax to the ground state, a phase-breaking process that loses the orientation of the vector in the x - y plane.

2. Bloch-Redfield 模型

这个模型把退相干分成了三种情况，对应 Bloch 球上箭头的三种变化，每种都和不同噪声有关，图 4 的 (b)(c)(d) 分别画了这三种情况。

(1) 纵向 relaxation (图 (b))

qubit 从高能态 $|1\rangle$ 把能量传给环境（周围的电路、热量影响），回到“低能态 $|0\rangle$ ”，这个过程的时间常数叫 T_1 。（比如 $T_1=85\mu s$ ，就是 qubit 从 $|1\rangle$ 到 $|0\rangle$ ，能量剩 $1/e$ 大概要 85 微秒）

蓝色弯箭头： $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ （能量释放，最常见，因为低温下环境吸收能量容易）；

橙色弯箭头： $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ （能量吸收，很少见，因为低温下环境没多少能量给 qubit）；

(2) 纯 dephasing (图 4 (c))

qubit 没丢能量（还是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加），但叠加态的相位乱了。原本是 $|0\rangle + |1\rangle$ ，变成 $|0\rangle + i|1\rangle$ ，再变成 $|0\rangle - |1\rangle$ ，最后完全分不清相位，箭头在赤道上“转圈扩散”（图 4 (c)）。

原因：纵向噪声（比如磁通噪声）让 qubit 频率乱飘，叠加态的两个成分（ $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ）振动速度不一样，慢慢就不同步了。

纯 dephasing 不丢能量（箭头还在赤道面，没上下动），只是相位乱了，可以用脉冲把相位掰回来。

(3) 横向 relaxation (图 4 (d))

就是上面两个的叠加效果。

T_2 代表总退相干速度，等于 T_1 导致的能量丢失 加上 T_ϕ 导致的相位乱掉，公式是 $1/T_2 = 1/(2T_1) + 1/T_\phi$ 。（如 $T_1=85\mu s$ ， T_2 可能只有 $95\mu s$ ）

- 红色：相位乱 (T_ϕ)，箭头在赤道扩散；
- 蓝色：能量掉 (T_1)，箭头从赤道慢慢往北极缩；
- 结果：箭头既缩短又扩散，很快就到球中心，信息丢失。

3.1/f 噪声

前面说的 T_1 、 T_2 都是指数衰减（箭头缩短的速度是固定的），实际中有一种常见噪声叫 $1/f$ 噪声，会让衰减变成“非指数”（曲线更陡或更平缓），这种低频噪声危害更大。

对 qubit 的影响： $1/f$ 噪声是低频波动多， T_2 衰减不是直线，而是高斯曲线（先慢后快）

下图是测 T_1 和 T_2 的实验结果，四个图对应不同测量方法：

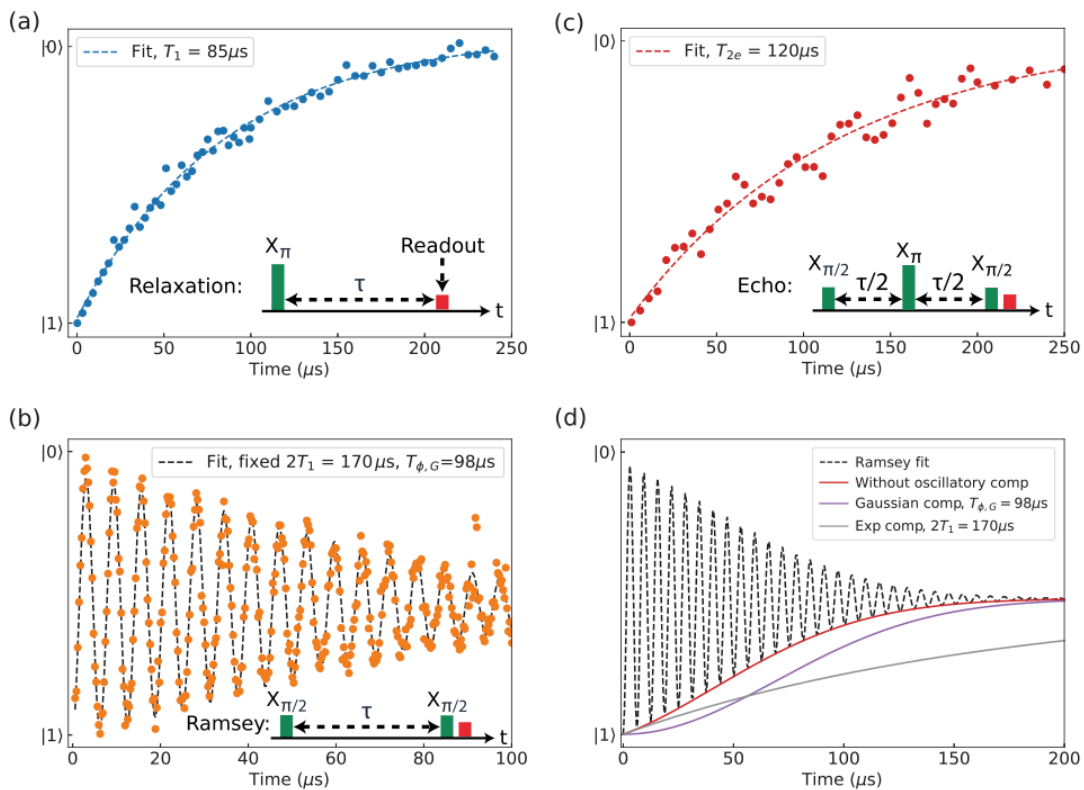


图 5 (a): 测 T_1 ，给 qubit 发 $X\pi$ 脉冲（让它从 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ），不断测量量子比特状态，结果是指数下降，拟合出 $T_1 = 85\mu s$ ($1/e$ 状态处)；

图 5 (b): 测 T_2 （没抵消低频噪声的 T_2 ）— 用 Ramsey 干涉，发两个 $X\pi/2$ 脉冲，中间等时间 τ ，结果是振荡衰减，衰减快，拟合出 $T_2^* = 95\mu s$ ；

图 5 (c): 测 T_{2E} （抵消了部分低频噪声的 T_2 ）— 用 Hahn 回波，在两个 $X\pi/2$ 中间加一个 $X\pi$ 脉冲（相当于重置相位），衰减变慢，拟合出 $T_{2E} = 120\mu s$ （比 T_2^* 长，说明抵消了部分 $1/f$ 噪声）；

图 5 (d): 分解衰减原因 — 把图 5 (b) 的数据拆成指数部分 (T_1 导致) 和高斯部分 ($1/f$ 噪声导致)，两个加起来刚好拟合实验数据，说明 $1/f$ 噪声确实让衰减变了样。

C. 常见的噪声例子

C. Common examples of noise （常见的“干扰源”：四种典型噪声）

1. 电荷噪声 (Charge noise)：静电干扰

电路表面的“小电荷陷阱”（基板里的杂质、金属表面的缺陷），电荷偶尔跳来跳去。

影响：主要让 T_1 变短（能量跑掉），如果 qubit 的 E_J/E_C 不够大（Transmon 没做好），还会让 T_ϕ 变短（相位乱）。

2. 磁通噪声 (Flux noise)：磁场波动

qubit 表面的磁矩（吸附的氧气分子、金属表面的未配对电子），磁矩偶尔翻转向，导致周围磁场波动。

影响：主要让 T_ϕ 变短（相位乱），因为磁场波动会让 Split Transmon 这类可调频率的 qubit 频率乱飘。

3. 光子数波动 (Photon number fluctuations)：杂光干扰

qubit 旁边的读出谐振腔里有残留光子（从室温传来的微波、电路发热产生的光子），光子数量偶尔变多变少。

让 T_ϕ 变短（相位乱），因为光子数变化会让 qubit 频率偶尔偏移。

4. 准粒子 (Quasiparticles) : 电路里的小杂质

超导材料里的未配对电子 (正常超导是电子成对的, 准粒子是单个电子), 可能由热量、辐射产生。

让 T_1 变短 (能量跑掉), 因为准粒子会带走 qubit 的能量, 还可能让 qubit 误跳到高能级。

D. Operator form of qubit-environment interaction (量子比特环境交互的算子形式)

暂时不看

E. 缓解噪声

E. Engineering noise mitigation (怎么缓解噪声)

1. 材料和制备改进: 从源头减少噪声

清洁基板: 洗掉基板上的杂质, 减少电荷陷阱 (减少电荷噪声)。

退火处理: 把电路加热再慢慢冷却, 让金属表面的缺陷变少 (减少磁通噪声)。

加准粒子陷阱: 在电路里加陷阱, 让准粒子跑进陷阱里, 不影响 qubit (减少准粒子噪声)。

2. 设计改进: 让 qubit 不怕噪声

改电容形状: 把 Transmon 的电容极板间距做大, 让电场少接触损耗界面 (减少电荷噪声影响)。

不对称 Split Transmon: 把 DC-SQUID 的两个结做不一样大, 降低对磁通噪声的敏感度 (第二章讲过)。

3. 动态解耦: 主动抵消噪声 (结合图 7 位置: 第三章 D 节 2 部分)

核心 idea: 用 高频脉冲打断噪声的影响, qubit 相位慢慢乱, 每隔一段时间发一个 π 脉冲 (让 qubit 转 180°), 把相位“掰回来”。

典型技术: CPMG 序列 (图 7 (a))

4. 低温工程:

加衰减器: 在低温冰箱里加微波衰减器, 减少室温传来的热光子 (减少光子数波动)。

贴吸收材料: 在电路周围贴吸波材料, 吸收 stray 微波 (减少光子噪声)。

优化制冷: 让低温箱的 10mK 级温度更稳定, 减少热量导致的准粒子 (减少准粒子噪声)。

小结

1. 噪声分两种: 固定的 (系统噪声, 能校准)、随机的 (随机噪声, 要防);
2. 退相干分三种: T_1 (丢能量)、 T_ϕ (相位乱)、 T_2 (又丢能量又乱相位), 用 Bloch 球和图 4 能直观看懂;
3. 误差缓解: 源头减噪声 (材料)、设计抗噪声 (结构)、主动抵消 (动态解耦)、环境控噪声 (低温)。

四、量子比特控制

这是咱们实验室重点研究方向之一。

这章讲的是关于如何操控超导量子比特, 从经典逻辑门的基础讲起, 逐步过渡到量子比特的具体控制方法。

A.经典计算机中的布尔逻辑门

A. Boolean logic gates used in classical computers (经典部分)

主要讲了经典电路的与或非门的真值表和特点，我们都很熟了，不展开了。文章里所说的经典计算就是不同门实现的组合逻辑，文章后面会用经典计算和量子门进行比较。








GATE		CIRCUIT SYMBOL	TRUTH TABLE	
NOT	The output is 1 when the input is 0 and 0 when the input is 1.		Input	Output
			0	1
			1	0
AND	The output is 1 only when both inputs are 1, otherwise the output is 0.		Input	Output
			0 0	0
			0 1	0
			1 0	0
			1 1	1
OR	The output is 0 only when both inputs are 0, otherwise the output is 1.		Input	Output
			0 0	0
			0 1	1
			1 0	1
			1 1	1
NAND	The output is 0 only when both inputs are 1, otherwise the output is 1.		Input	Output
			0 0	1
			0 1	1
			1 0	1
			1 1	0
NOR	The output is 1 only when both inputs are 0, otherwise the output is 0.		Input	Output
			0 0	1
			0 1	0
			1 0	0
			1 1	0
XOR	The output is 1 only when the two inputs have different value, otherwise the output is 0.		Input	Output
			0 0	0
			0 1	1
			1 0	1
			1 1	0
XNOR	The output is 1 only when the two inputs have the same value, otherwise the output is 0.		Input	Output
			0 0	1
			0 1	0
			1 0	0
			1 1	1

FIG. 8. Classical single-bit and two-bit Boolean logic gates. For each gate, the name, a short description, circuit representation, and input/output truth tables are presented. The numerical values in the truth table correspond to the classical bit values 0 and 1. Adapted from Ref. 171.

通用门集：无需所有门，仅需NOT+AND或单独 NAND或单独 NOR，即可组合出任意布尔逻辑，比如加法、乘法。




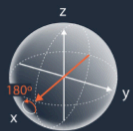

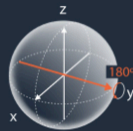

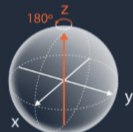

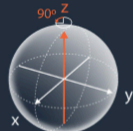

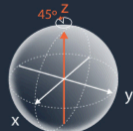


B.量子计算机中的量子逻辑门

B. Quantum logic gates used in quantum computers (量子计算机的逻辑门)

量子比特不止 0 和 1，还能是 0 和 1 的叠加态。量子门需能操控叠加态，且均为**么正操作（可逆）**，

1.单比特门

量子比特的状态用布洛赫球表示（一个单位球，北极是 0 态，南极是 1 态，球面上的点是叠加态，球内部则是退相干后的状态），单量子比特门就是让布洛赫球上的点绕某个轴旋转固定角度。作者用下表呈现了不同门的名称、电路符号、矩阵表示、真值表、布洛赫球旋转。

GATE	CIRCUIT REPRESENTATION	MATRIX REPRESENTATION	TRUTH TABLE	BLOCH SPHERE						
I Identity-gate: no rotation is performed.		$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$0\rangle$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$1\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$									
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$									
X gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the x-axis.		$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$1\rangle$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$0\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$									
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$									
Y gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the y-axis.		$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$i 1\rangle$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$-i 0\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$i 1\rangle$	$ 1\rangle$	$-i 0\rangle$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$i 1\rangle$									
$ 1\rangle$	$-i 0\rangle$									
Z gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the z-axis.		$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$0\rangle$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$- 1\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$- 1\rangle$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$									
$ 1\rangle$	$- 1\rangle$									
S gate: rotates the qubit state by $\frac{\pi}{2}$ radians (90°) about the z-axis.		$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$0\rangle$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$e^{i\frac{\pi}{2}} 1\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{2}} 1\rangle$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$									
$ 1\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{2}} 1\rangle$									
T gate: rotates the qubit state by $\frac{\pi}{4}$ radians (45°) about the z-axis.		$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$0\rangle$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$									
$ 1\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$									
H gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about an axis diagonal in the x-z plane. This is equivalent to an X-gate followed by a $\frac{\pi}{2}$ rotation about the y-axis.		$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$0\rangle$</td><td>$\frac{ 0\rangle + 1\rangle}{\sqrt{2}}$</td></tr><tr><td>$1\rangle$</td><td>$\frac{ 0\rangle - 1\rangle}{\sqrt{2}}$</td></tr></table>	Input	Output	$ 0\rangle$	$\frac{ 0\rangle + 1\rangle}{\sqrt{2}}$	$ 1\rangle$	$\frac{ 0\rangle - 1\rangle}{\sqrt{2}}$	
Input	Output									
$ 0\rangle$	$\frac{ 0\rangle + 1\rangle}{\sqrt{2}}$									
$ 1\rangle$	$\frac{ 0\rangle - 1\rangle}{\sqrt{2}}$									

Identity（恒等门）：不旋转，状态不变。

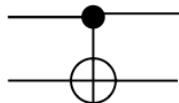
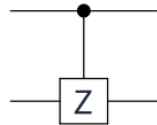
X 门,绕 x 轴旋转 180° 。 Y 门,绕 y 轴旋转 180° 作为量子的NOT 门。让北极→南极。

Z 门：绕 z 轴旋转 180° ，就改变相位。S 门，绕 z 轴旋转 90° 。T 门，绕 z 轴旋转 45°

H 门：也叫哈达玛门，绕 x-z 对角轴旋转 180° ，将纯态转为均匀叠加态。让北极→赤道。

2.双比特门

双量子比特门能让两个独立的量子比特产生纠缠（一个量子比特的状态会直接影响另一个，即使分开也关联）

GATE	CIRCUIT REPRESENTATION	MATRIX REPRESENTATION	TRUTH TABLE										
Controlled-NOT gate: apply an X-gate to the target qubit if the control qubit is in state $ 1\rangle$		$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$00\rangle$</td><td>$00\rangle$</td></tr><tr><td>$01\rangle$</td><td>$01\rangle$</td></tr><tr><td>$10\rangle$</td><td>$11\rangle$</td></tr><tr><td>$11\rangle$</td><td>$10\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 00\rangle$	$ 00\rangle$	$ 01\rangle$	$ 01\rangle$	$ 10\rangle$	$ 11\rangle$	$ 11\rangle$	$ 10\rangle$
Input	Output												
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$												
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$												
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$												
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$												
Controlled-phase gate: apply a Z-gate to the target qubit if the control qubit is in state $ 1\rangle$		$\text{CPHASE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	<table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td>$00\rangle$</td><td>$00\rangle$</td></tr><tr><td>$01\rangle$</td><td>$01\rangle$</td></tr><tr><td>$10\rangle$</td><td>$10\rangle$</td></tr><tr><td>$11\rangle$</td><td>$- 11\rangle$</td></tr></table>	Input	Output	$ 00\rangle$	$ 00\rangle$	$ 01\rangle$	$ 01\rangle$	$ 10\rangle$	$ 10\rangle$	$ 11\rangle$	$- 11\rangle$
Input	Output												
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$												
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$												
$ 10\rangle$	$ 10\rangle$												
$ 11\rangle$	$- 11\rangle$												

CNOT 门 (受控非门)

有控制比特和目标比特。控制比特的状态决定是否翻转目标比特。只有当控制比特是 1 时，才翻转目标比特；控制比特是 0 时，目标比特不变。

真值表（控制比特在前，目标在后）：输入 $00 \rightarrow 00$, $01 \rightarrow 01$, $10 \rightarrow 11$, $11 \rightarrow 10$ 。

能产生纠缠！输入控制比特： $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ ，并输入控制比特： $|0\rangle$ ，输出后会变成 $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$

这是典型的贝尔纠缠态，两个量子比特再也没法拆成独立的状态。网上搜的纠缠的定义如下。

数学定义

假设一个复合系统是由两个子系统A、B所组成，这两个子系统A、B的希尔伯特空间分别为 H_A, H_B 。其复合态表示为 $|\Psi_{AB}\rangle$ ，如果 $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ ，则 $|\Psi_A\rangle$ 是 H_A 中的状态， $|\Psi_B\rangle$ 是 H_B 中的状态。

如果 $|\Psi_{AB}\rangle$ 不可分离的，则它是纠缠态，也就是说，如果它不能写成 $|\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ ，则子系统A、B相互纠缠。

纠正理解：

输入是两个端口，输出应该也是两个值才对？

量子门操作的是“态的变换”，多比特门会同时改变多个比特的联合态。**改变的都是比特的联合态。**

CPHASE 门 (受控相位门，也叫 CZ 门)

同样有控制和目标比特两个端口，控制和目标比特可互换。

只有当控制比特和目标比特都为 1 时，才给目标比特加一个 π 相位（不改变测量结果，但会影响叠加态的干涉）；其他情况不变。

真值表：输入 $00 \rightarrow 00$, $01 \rightarrow 01$, $10 \rightarrow 10$, $11 \rightarrow -11$ （-1代表相位变负）。仅改变相位。

和 CNOT 门能互相转换（加两个 H 门就行）。通过 H 门转换 ——

$U_{\text{CNOT}} = (I \otimes H)U_{\text{CPHASE}}(I \otimes H)$ （H 门作用于目标比特后，CPHASE 等效为 CNOT）。

3.通用门集

量子计算的通用门集需满足“任意单量子比特门 + 一个纠缠双量子比特门”，即可组合出所有量子操作（包括Shor 算法、VQE 算法）。这与经典通用门集（NAND）不同。**纠缠门提供量子特性，单比特门调整叠加态。**

C.经典门与量子门比较

C. Comparing classical and quantum gates (比较与区别)

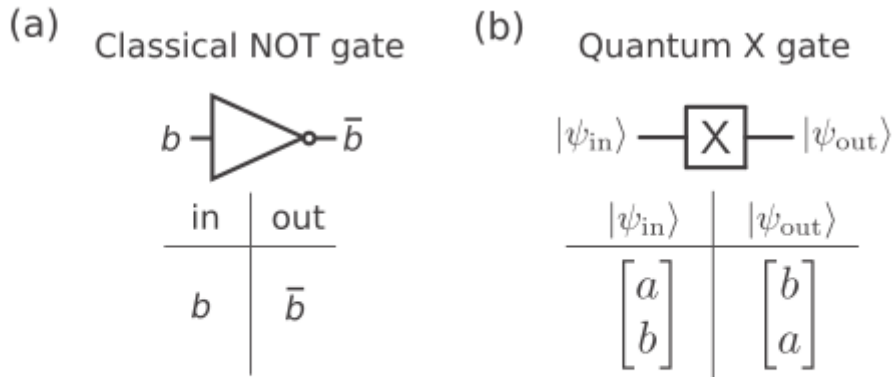


FIG. 11. Comparison of the classical inverter (NOT) gate and quantum bit flip (X) gate. (a) The classical NOT gate that inverts the state of a classical bit. (b) The quantum X gate, which flips the amplitudes of the two components of a quantum bit.

经典 NOT 门 (图 11a)：输入 $0 \rightarrow$ 输出 1 ，输入 $1 \rightarrow$ 输出 0 ，就是比特值的翻转，只有两种可能。

量子 X 门 (图 11b)：输入 $|0\rangle \rightarrow$ 输出 $|1\rangle$ ，输入 $|1\rangle \rightarrow$ 输出 $|0\rangle$ ，但如果输入是叠加态（比如 $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ ），X 门会翻转叠加态的振幅（变成 $(|1\rangle - i|0\rangle)/\sqrt{2}$ ），不仅翻转了值，还会保留量子态的相位信息。

最关键的 3 个区别

可逆性：所有量子门都是可逆的（么正操作的逆操作仍为么正操作），数学上可逆；但经典门大多不可逆，AND 门输出 0 ，没法知道输入是 00 、 01 还是 10 。

叠加态操控：量子门能直接操控叠加态，比如 H 门把 $|0\rangle$ 变成叠加态，经典门只能操控 0 和 1 。

门的组合：量子通用门需要任意单量子比特门 + 一个纠缠双量子比特门，才能能实现所有量子计算。经典通用门只要有一组，就能实现所有经典计算（单独一个 NAND 门就能组合出所有逻辑操作）。

D.单量子比特门操控

D. Single-qubit gates (怎么操控单比特门)

单比特控制核心是微波脉冲通过电容耦合驱动量子比特旋转。

1.微波控制

如何用微波脉冲控制超导量子比特的旋转？

超导量子比特（如 transmon）主要靠微波脉冲控制，核心是微波驱动线和量子比特的电容耦合。

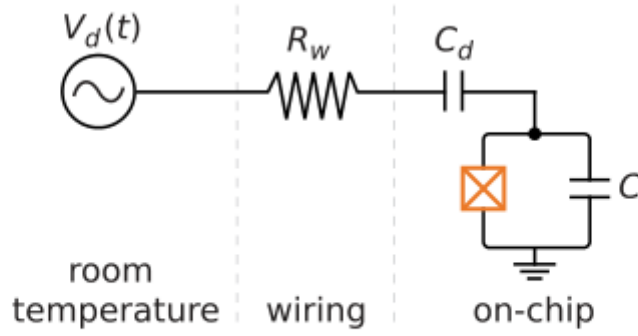


FIG. 12. Circuit diagram of capacitive coupling of a microwave drive line [characterized by a time-dependent voltage $V_d(t)$] to a generic transmonlike superconducting qubit.

左边是室温下的微波线路，右边是低温下的芯片上的超导量子比特，两者通过电容 (C_d) 耦合。微波驱动线输出随时间变化的电压 $V_d(t)$ ，这个电压会通过电容传递到量子比特，驱动量子比特的状态旋转。

2. 旋转的实现

怎么实现 X、Y 方向的旋转？

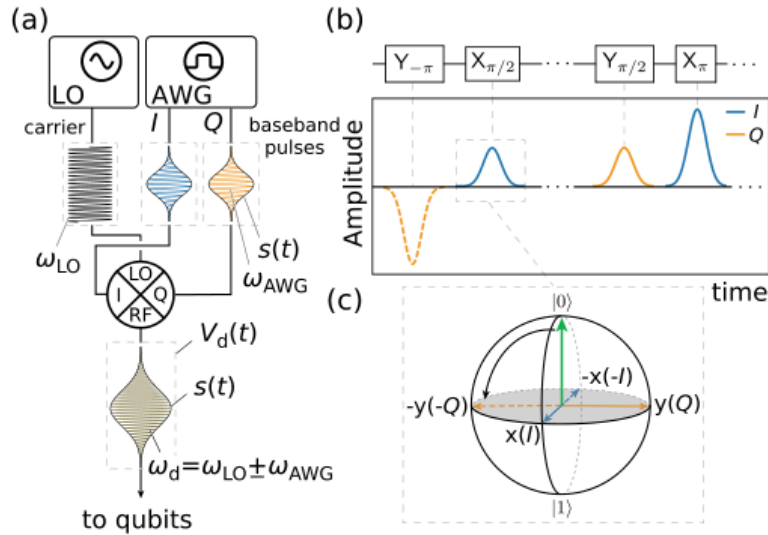


FIG. 13. (a) Schematic of a typical qubit drive setup. A microwave source supplies a high-frequency signal (ω_{LO}), while an arbitrary waveform generator (AWG) supplies a pulse-envelope ($s(t)$), sometimes with a low frequency component, ω_{AWG} , generated by the AWG. The IQ-mixer combines the two signals to generate a shaped waveform $V_d(t)$ with a frequency $\omega_d = \omega_{LO} \pm \omega_{AWG}$, typically resonant with the qubit. (b) Example of how a gate sequence is translated into a waveform generated by the AWG. Colors indicate the I and Q components. (c) The action of a $X_{\pi/2}$ pulse on a $|0\rangle$ state to produce the $|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$ state.

图 13a：微波生成流程：本地振荡器 (LO) 提供高频载波 (如 5GHz)，任意波形发生器 (AWG) 生成脉冲包络 ($s(t)$)，控制脉冲的形状和时长，两者通过 IQ 混频器组合，生成最终的微波脉冲 $V_d(t)$ ，($\omega_d = \omega_{LO} \pm \omega_{AWG}$) 送到量子比特，驱动 X/Y 方向旋转。

图 13b：脉冲包络对应量子门：比如要实现 X 门，AWG 生成 I 通道的脉冲；要实现 Y 门，生成 Q 通道的脉冲 (I 和 Q 是微波的两个正交分量，对应 X 和 Y 轴)。

- I 通道 (同相) 的脉冲对应 X 方向旋转
- Q 通道 (正交) 的脉冲对应 Y 方向旋转
- 脉冲时长决定旋转角度。 π 脉冲对应 180° 旋转， $\pi/2$ 脉冲对应 90° 旋转

图 13c: 具体例子：一个 $X_{\pi/2}$ 脉冲（绕 X 轴转 90° ）把 $|0\rangle$ 态变成 $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ 态，布洛赫球上：从北极转到了赤道的西侧点。

3. 虚拟 Z 门

虚拟 Z 门是绕 z 轴的旋转，正常需要单独的微波脉冲，但虚拟 Z 门不用，它通过**改变后续微波脉冲的相位**实现 Z 门的效果。

先给一个 X_θ 脉冲（绕 X 轴转 θ ），再给一个相位偏移 $\pi/2$ 的 X_θ 脉冲，组合起来的效果就相当于 “ $X_\theta + Z_\pi + X_\theta$ ”，中间的 Z_π 就是虚拟 Z 门。

好处：不占用额外时间，没有实际脉冲，能减少量子比特的 decoherence（退相干），提高控制效率。

4. The DRAG scheme

DRAG 方案能解决能级泄漏问题。

超导量子比特是弱非谐振振荡器，除了 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ，还有 $|2\rangle$ 、 $|3\rangle$ 等更高能级。如果微波脉冲的频率范围太宽，会不小心把 $|1\rangle$ 态激发到 $|2\rangle$ 态（这叫泄漏），导致量子计算出错。

图 14，分 a-g 七子图，展示 DRAG 方案的原理与效果：

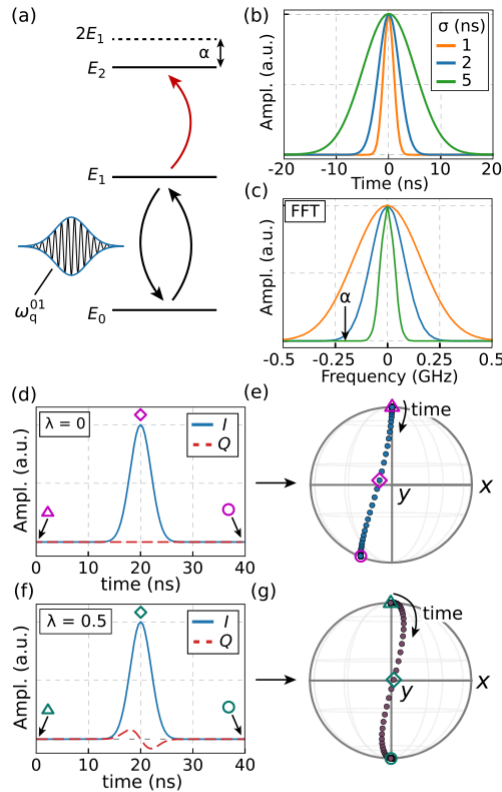


FIG. 14. (a) Schematic level diagram of a weakly anharmonic transmon qubit subjected to a drive at transition frequency $\omega_d = \omega_q$. (b) Gaussian waveform with standard deviation σ . (c) Fourier transform of (b) showing how the short pulse lengths lead to a significant overlap with the $\omega_q + \alpha$ transition, separated from ω_q by the anharmonicity α . (d) Waveform of a X_π pulse without DRAG modulation. (e) Effect of the waveform from (d) on a qubit initialized in the $|0\rangle$ state with $\alpha = -200$ MHz and $\omega_q = 4$ GHz. The dephasing error is visible as a deviation from the $|1\rangle$ after the pulse. (f) Waveform of a X_π pulse with DRAG modulation for a qubit with anharmonicity $\alpha = -200$ MHz and DRAG parameter $\lambda = 0.5$ to cancel dephasing errors (see the text for details). (g) Effect of the waveform from (f) on the same qubit as (e). Calculated using mesolve in the software package QuTiP.

图 14a: transmon 量子比特的能级图， $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ 的频率是 ω_q ， $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 的频率是 $\omega_q + \alpha$ (α 是负的，实际比 ω_q 小 200MHz)。

图 14b、c: 普通高斯脉冲的频率范围宽（图 14b 为高斯脉冲图，横轴是时间），会覆盖 $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 的频率 ($\omega_q + \alpha$)，（图 14c 的 FFT 图，横轴是频率），导致泄漏。

图 14d、e: 没有 DRAG 的 X_π 脉冲（图 14d），会让量子态偏离 $|1\rangle$ （图 14e，出现相位误差）。

图 14f、g: I 通道为高斯包络, Q 通道为其导数。加了 DRAG 的脉冲 (图 14f, Q 通道加了脉冲的导数项), 能抑制泄漏和相位误差, 量子态准确停在 $|1\rangle$ (图 14g)。

波形修改规则: $s(t) \rightarrow \begin{cases} s(t) & \text{I通道} \\ \lambda \cdot \dot{s}(t)/\alpha & \text{Q通道} \end{cases}$ (λ 为 scaling 参数, 理论最优 $\lambda=0.5$ 用于减少相位误差, $\lambda=1$ 用于减少泄漏)

DRAG 的原理是: 通过修改脉冲的正交分量 (Q 通道), 加入脉冲包络的导数项, 抵消更高能级的激发, 让微波脉冲只作用于 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, 不碰 $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 。现在先进的单量子比特门, 用 DRAG 后保真度能达到 99% 以上。

E. 可调谐量子比特的双量子比特门

E. The iSWAP two-qubit gate in tunable qubits (iSWAP 门)

双量子比特门需要两个量子比特相互作用, 可调谐量子比特 (如 split transmon) 可以通过调频率实现这种相互作用, iSWAP 门是其中一种常用的。

iSWAP 门的核心: **共振交换激发**

当两个量子比特的频率调到一致 (共振) 时, 它们会通过电容耦合交换激发。如量子比特 1 在 $|1\rangle$ 、量子比特 2 在 $|0\rangle$, 共振后会变成量子比特 1 在 $|0\rangle$ 、量子比特 2 在 $|1\rangle$, 同时会加一个 i 的相位 (所以叫 iSWAP)。

其中耦合强度 g (决定交换时间, g 越大, 交换越快), 典型值是 5-40MHz, 交换时间约 50-200ns。

注意, 调频率时会让量子比特离开磁通甜点 (对磁通噪声不敏感的点), 所以需要用虚拟 Z 门消除调频率带来的额外相位。

图15直观展示了 iSWAP 的操作过程:

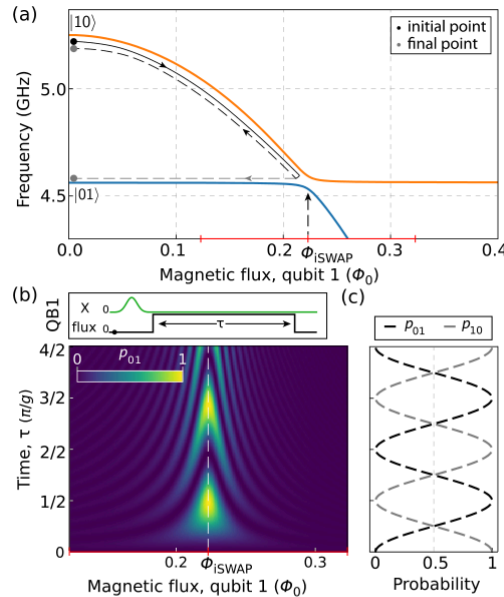


FIG. 15. (a) Spectrum of two transmon qubits (written in the combined basis as $|QB1, QB2\rangle$) as the local flux through the loop of qubit 1 is increased. The black/dashed lines with arrows indicate a typical flux trajectory to demonstrate operation of iSWAP gate. (b) Probability of swapping into the $|01\rangle$ state as a function of time and flux. The pulse sequence corresponds to preparing $|10\rangle$ and performing a typical iSWAP operation (for a time τ). (c) Probabilities of $|01\rangle$ (black) and $|10\rangle$ (gray) at $\Phi = \Phi_{iSWAP}$ [white dashed line in (b)] as the time spent at the operating point (τ) is increased. This simulation does not include any decay effects.

- 图 15a: 两个可调谐量子比特的能谱 (纵轴是频率, 横轴是量子比特 1 的磁通)。黑色虚线是操作轨迹: 先把量子比特 1 调到和量子比特 2 共振 (Φ_{iSWAP} 处), 让它们交换激发, 再调回原来的频率。

操作过程:

1. 初始态：量子比特 1 在 $|1\rangle$ 、量子比特 2 在 $|0\rangle$ （态 $|10\rangle$ ），频率分别为 ω_{q1} 、 ω_{q2} （不共振）；
 2. 调磁通：改变量子比特 1 的磁通，使其频率接近 ω_{q2} （共振点 Φ_{iSWAP} ）；
 3. 交换激发：共振时两比特通过电容耦合交换能量， $|10\rangle \rightarrow |01\rangle$ ；
 4. 恢复频率：调回磁通，两比特脱离共振，完成 iSWAP 操作；
- 图 15b：交换概率随时间和磁通的变化。在 Φ_{iSWAP} 处，概率会周期性波动（可以看到右上角有个 P_{01} ，代表 01 态的概率对应的颜色）。
 - 图 15c：固定在 Φ_{iSWAP} 处， $|01\rangle$ 和 $|10\rangle$ 的概率随时间变化。每过 $\pi/(2g)$ 时间（ g 是耦合强度），概率会从 $|01\rangle$ 变成 $|10\rangle$ ，实现交换。

$$U_{iSWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 核心是交换 } |01\rangle \text{ 与 } |10\rangle \text{ 并加 } -i \text{ 相位; 调频率过程中量子比特会}$$

积累额外相位

$\theta_z = \int (\omega_q - \omega(t)) dt$ ，需通过“虚拟 Z 门”抵消，确保门操作纯净。两个 iSWAP + 若干单比特门可组合实现 CNOT 门，适合量子模拟，目前已用于生成 10 比特 GHZ 纠缠态。

F. 可调谐量子比特的双量子比特门

F. The CPHASE two-qubit gate in tunable qubits（CPHASE 门）

CPHASE 门比 iSWAP 门更常用，因为它的保真度最高（ ≥ 0.994 ），无需交换能量，能直接用于量子纠错。它利用量子比特的更高能级（比如 $|20\rangle$ ）实现条件相位。

CPHASE 门的原理：绝热相位积累

只有当两个量子比特都在 $|1\rangle$ 态，即 $|11\rangle$ 时，才会通过和 $|20\rangle$ 的能级排斥获得 π 相位；其他状态（ $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ ）不受影响。

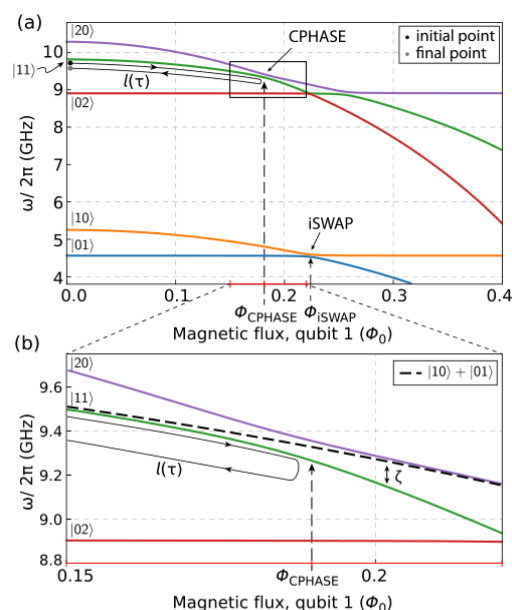


FIG. 16. (a) Spectrum of two coupled transmon qubits (using typical transmonlike values for Josephson energies and capacitances) as the local magnetic flux for qubit 1 is varied. The two lower branches corresponding to $|01\rangle$ and $|10\rangle$ are involved in the i SWAP gate operation at $\Phi = \Phi_{\text{ISWAP}}$. The avoided crossing indicated in the black rectangle is used to implement the conditional phase gate (CPHASE), at $\Phi = \Phi_{\text{CPHASE}}$. The black line with arrows indicates a typical trajectory used to implement a CPHASE gate (starting at the black circle and ending at the gray circle). (b) Zoom in of the $|20\rangle \leftrightarrow |11\rangle$ avoided crossing highlighted in the black box in (a) at $\Phi = \Phi_{\text{CPHASE}}$. The parameter ζ quantifies the difference in energy between $|11\rangle$ and $|01\rangle + |10\rangle$ and $\ell(\tau)$ is the trajectory in (Φ, t) -space.

16的两图纵轴为频率，横轴为量子比特 1 的磁通 Φ_{ext} ；

图 16a：包含更高能级 ($|20\rangle$) 的能谱。方框里是 $|11\rangle$ 和 $|20\rangle$ 的能级交叉，是 CPHASE 门的关键操作点 (Φ_{CPHASE})。

$|11\rangle$ 与 $|20\rangle$ 的能级因耦合产生排斥（间距变大），而 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ 与高能级无耦合，能级不变；

图 16b：放大红色方框的区域，展示 $|11\rangle$ 和 $|20\rangle$ 的能级排斥。通过缓慢移动量子比特 1 的磁通（绝热过程），让 $|11\rangle$ 态靠近 $|20\rangle$ 态但不激发到 $|20\rangle$ ，从而累积获得一个 π 的相位，其他态无相位变化。

更高能级 ($|20\rangle$) 是辅助，不实际占用，只是通过能级排斥给 $|11\rangle$ 态加相位，避免了 i SWAP 门的频率调谐问题。

过程：

1. 准备量子态， $|11\rangle$ 、 $|01\rangle$ 等；
2. 绝热调整磁通至 Φ_{CPHASE} ，等待时间 τ 使 $|11\rangle$ 积累 π 相位；
3. 调回磁通，用虚拟 Z 门抵消单比特额外相位；

4. 最终实现的门单位矩阵： $U_{\text{CPHASE}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 仅 $|11\rangle$ 态加 -1 相位；

优势：

1. 保真度高：现在能达到 99.44% 以上，超过量子纠错表面码的容错阈值（99%），是大规模量子计算的核心门。
2. 可直接用于量子纠错：表面码量子纠错需要高保真的 CPHASE 门，目前已经用它实现了 5 比特 GHZ 态（一种多量子比特纠缠态），实现 5 比特重复码，模拟 Hubbard 模型。

G.全微波的双量子比特门

G. Two-qubit gates using only microwaves

可调谐量子比特的门需要调磁通，会引入磁通噪声；而全微波门不用调频率，适合固定频率量子比特，更稳定。

1.CR门

CR 门（交叉共振门）是固定频率量子比特的核心门（图 17）。CR 门是目前应用最广的微波门。

CR 门的原理：通过交叉共振驱动，驱动一个量子比特的频率等于另一个的频率，让驱动信号同时影响两个量子比特，实现量子比特 1 的状态控制量子比特 2 的旋转。

实现的效果为：比如量子比特 1 为 $|1\rangle$ 时，量子比特 2 绕 X 轴转 π ；量子比特 1 为 $|0\rangle$ 时，量子比特 2 不转。

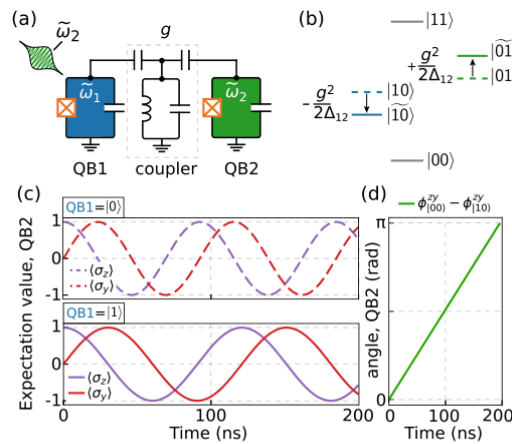


FIG. 17. (a) Schematic circuit diagram of two fixed frequency transmons coupled through a resonator yielding an overall coupling coefficient g . Qubit 1 driven at the frequency of qubit 2 leads to the CR gate. (b) Schematic level diagram of the always-on coupling leading to dressed states $|01\rangle$ and $|10\rangle$ with $\Delta_{12} = \omega_1 - \omega_2$. (c) Simulations of the expectation values of $\langle\sigma_z\rangle$ and $\langle\sigma_y\rangle$ for qubit 2 as a drive at the frequency of qubit 2 is applied to qubit 1. The upper panel shows regular Rabi oscillations when qubit 1 is in the $|0\rangle$ state. The bottom panel shows a modified Rabi frequency when qubit 1 is in $|1\rangle$ state, in accordance with Eq. (134). (d) Difference in angle in the (z, y) plane as a function of length of the applied drive to qubit 1. At approximately 200 ns, a π -phase shift has been acquired.

图 17a：两个固定频率量子比特QB1和QB2，通过线性谐振器耦合（不调频率），驱动量子比特 1 的微波频率等于量子比特 2 的频率 $\omega_{q1} = \omega_{q2}$ 。

图 17b：能级图，QB1 与 QB2 的能级因耦合产生能级分裂，驱动 QB1 的微波会通过耦合间接影响 QB2 的状态。

图 17c：量子比特 2 的概率随时间变化图，如果量子比特 1 在 $|0\rangle$ ，量子比特 2 做普通 Rabi 振荡；如果量子比特 1 在 $|1\rangle$ ，振荡频率会变。

- 上图（QB1 为 $|0\rangle$ ）：QB2 做普通 Rabi 振荡（频率 Ω_0 ）；
- 下图（QB1 为 $|1\rangle$ ）：QB2 的振荡频率变为 Ω_1 （ $\Omega_1 \neq \Omega_0$ ），这是条件振荡，核心是 CR 门的纠缠源；

图 17d：横轴为“驱动时间”，纵轴为“QB2 在 (z,y) 平面的角度差”。

相位差随时间变化。约 200ns 时，相位差达到 π ，实现 CR 门。 $U_{CR_\pi} = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z \otimes \sigma_x}$

2.CR 门的改进与应用

改进方案：

- echo-CR：加 π 脉冲抵消 ac-Stark 移位（驱动导致的比特频率偏移），保真度提升至 0.93；
- aceCR（主动抵消 echo-CR）：加额外抵消脉冲，保真度提升至 0.991；

应用

- 固定频率比特的核心门；
- 用于量子纠错（4 比特贝尔态错误检测）、量子机器学习（学习奇偶性问题）、分子能量计算（VQE 算法计算 H_2 、LiH 能量）

3.其他仅微波控制门

Other microwave-only gates

bSWAP, MAP, and RIP 其他微波门：bSWAP、MAP、RIP

bSWAP 门：利用 $|00\rangle$ 和 $|11\rangle$ 态的跃迁（通过更高能级辅助），直接产生纠缠，适合模拟自旋系统。

MAP 门：让量子比特的更高能级（比如 $|12\rangle$ 和 $|03\rangle$ ）共振，通过微波驱动产生条件相位，缺点是需要精确匹配更高能级的频率。

RIP 门：两个量子比特耦合到同一个共振腔，通过给腔加微波脉冲，让量子比特获得状态依赖的相位，适合频率差异大的量子比特。

H.可调耦合的门实现

H.Gate implementations with tunable coupling（可调耦合的门实现）

为了解决“固定耦合太弱”和“可调谐量子比特噪声大”的问题，又发展出了可调耦合技术。

在两个量子比特之间加一个可调耦合器（flux-tunable SQUID），通过调耦合器的参数控制两个量子比特的相互作用强度。

两种方式：

1. 调耦合强度 g ：通过磁通改变耦合器的临界电流，让 g 随时间变化。
2. 调耦合器的频率：让耦合器的频率在两个量子比特频率之间切换，实现需要时耦合，不需要时断开。

优势：耦合的开关比高，能达到 1000 倍，减少闲置时的串扰；门保真度高，比如用可调耦合器实现的 iSWAP 门，保真度能达到 98.2%

小结

第四章从经典门→量子门→具体控制方法，核心是讲清如何用微波、磁通等工具，让量子比特按需求旋转、产生纠缠：

1. **基础**：经典门是操控 0/1，量子门能操控叠加态，且全可逆；
2. **单量子比特控制**：用微波脉冲通过电容耦合驱动旋转，DRAG 方案解决能级泄漏，虚拟 Z 门节省时间；
3. **双量子比特控制**：
可调谐量子比特：iSWAP（交换激发）、CPHASE（利用更高能级加相位，保真度高）；

固定频率量子比特：CR 门（微波交叉共振，噪声小）；

可调耦合：加耦合器，按需控制相互作用，兼顾效率和稳定性。

五、量子比特读出

内容速览：色散读出原理，Purcell 滤波器抑制自发辐射，约瑟夫森参量放大器（JPA）/ 行波参量放大器（TWPA）提升信噪比至量子极限。

主题引出：量子比特的状态（ $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ ）没法直接观测，需要通过专门的读出技术把量子状态转换成经典电信号。

A. 色散读出

要读量子比特状态，最常用的方法是色散读出。

让量子比特和一个读出谐振器（一个微波共振腔）耦合，量子比特的状态会改变谐振器的频率，我们通过测量谐振器的频率偏移，就能反推量子比特是 $|0\rangle$ 还是 $|1\rangle$ 。

1. 为什么要用谐振器？

量子比特太脆弱了，直接测量会让它的量子态消失，发生退相干。而谐振器是一个中间器件，量子比特先和谐振器通过电容 / 电感耦合，改变谐振器频率，再测量谐振器的频率，既能获取量子比特状态，又能减少对量子比特的直接干扰（量子非破坏测量，QND）。

2. 读出实例

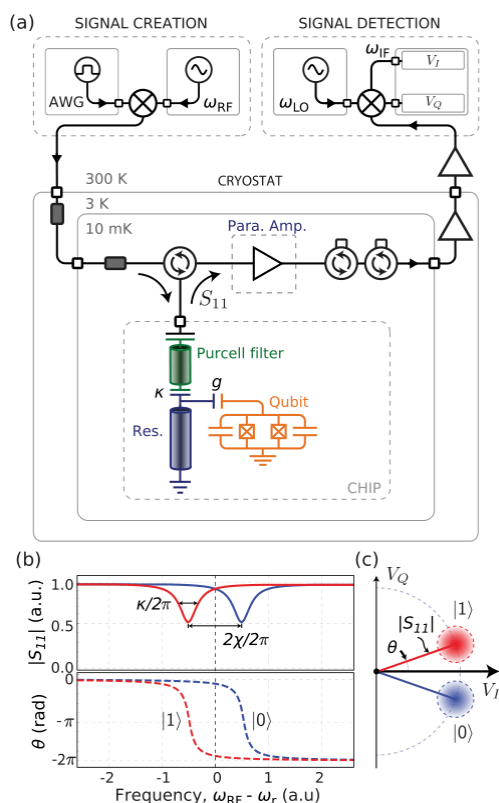


FIG. 19. (a) Simplified schematic of a representative experimental setup used for dispersive qubit readout. The resonator probe tone is generated, shaped and timed using an arbitrary waveform generator (AWG), and sent down into the cryostat. The reflected signal S_{11} is amplified, first in a parametric amplifier and then in a low-noise HEMT amplifier, before it is downconverted using heterodyne mixing and finally sampled in a digitizer. (b) Reflected magnitude $|S_{11}|$ and phase θ response of the resonator with linewidth κ , when the qubit is in its ground state $|0\rangle$ (blue) and excited state $|1\rangle$ (red), separated with a frequency $2\chi/2\pi$. (c) Corresponding complex plane representation, where each point is composed of the in-plane $\text{Re}[S_{11}]$ and quadrature $\text{Im}[S_{11}]$ components. The highest state discrimination is obtained when probing the resonator just in-between the two resonances, [dashed line in (b)], thus maximizing the distance between the states.

图 19a: 实验装置示意图

信号从产生到检测的全流程

左边：室温下，任意波形发生器（AWG）产生探测微波脉冲，通过线路送到低温区；

中下：低温环境下，探测脉冲先经过Purcell 滤波器（保护量子比特），再送到芯片上的读出谐振器和量子比特（橙色）上；

右边：信号检测系统。谐振器反射的信号先经过参数放大器（放大微弱信号），再经过普通放大器（HEMT），最后通过外差混频，把高频信号转成低频和数字化，变成电脑能处理的 I/Q 信号。

这个装置的作用是产生探测信号，再让信号和量子比特和谐振器作用，最后把反射信号放大并转换成可测量的经典信号。

图 19b: 谐振器的频率偏移

横轴是探测信号频率 (ω_{RF})，纵轴是反射信号的幅度 ($|S_{11}|$) 和相位(下边的虚线)；

蓝色曲线：量子比特在 $|0\rangle$ 态时，谐振器的共振频率是 $\omega_r^{(0)}$ ；幅度最低处，共振吸收最强。

红色曲线：量子比特在 $|1\rangle$ 态时，谐振器的共振频率会偏移一个小量 ($2\chi/2\pi$, χ 是色散移位，典型值 1-10MHz)，变成 $\omega_r^{(1)}$ ；

我们把探测信号的频率设在 $\omega_r^{(0)}$ 和 $\omega_r^{(1)}$ 中间（图中虚线处），这时 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态对应的反射相位差最大，最容易区分。

图 19c: I-Q 平面的状态区分

图是告诉我们最终怎么判断量子态的

横轴是同相分量 I，纵轴是正交分量 Q；

蓝色点：量子比特在 $|0\rangle$ 态时，反射信号对应的 I/Q 值；因噪声略有扩散，形成高斯分布。

红色点：量子比特在 $|1\rangle$ 态时，反射信号对应的 I/Q 值；

为什么能区分？

因为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态让谐振器频率偏移，导致反射信号的相位不同，反映在 I-Q 平面就是两个分开的点群。电脑只要看信号落在哪个点群，就知道量子比特是 $|0\rangle$ 还是 $|1\rangle$ 。

3. 色散读出的细节

什么叫色散？因为量子比特的状态像光的色散现象一样，让谐振器的频率分开；

量子非破坏（QND）：只要探测信号的光子数不多，谐振器和量子比特之间不会交换能量，只会互相推频率，量子比特的状态不会被破坏，能重复测量；

如果探测信号太强，光子数太多，会导致“ac-Stark 移位”，会让量子比特退相干，所以要控制探测信号的强度。

B. 谐振器的幅度和相位的测量

知道了通过谐振器频率反推量子态，下一步是怎么精确测量谐振器的幅度和相位，这需要用到的微波信号处理技术，核心技术是 I-Q 混频和 外差解调。

1. I-Q 混频

I-Q 混频把微波信号拆成两个分量进行分析

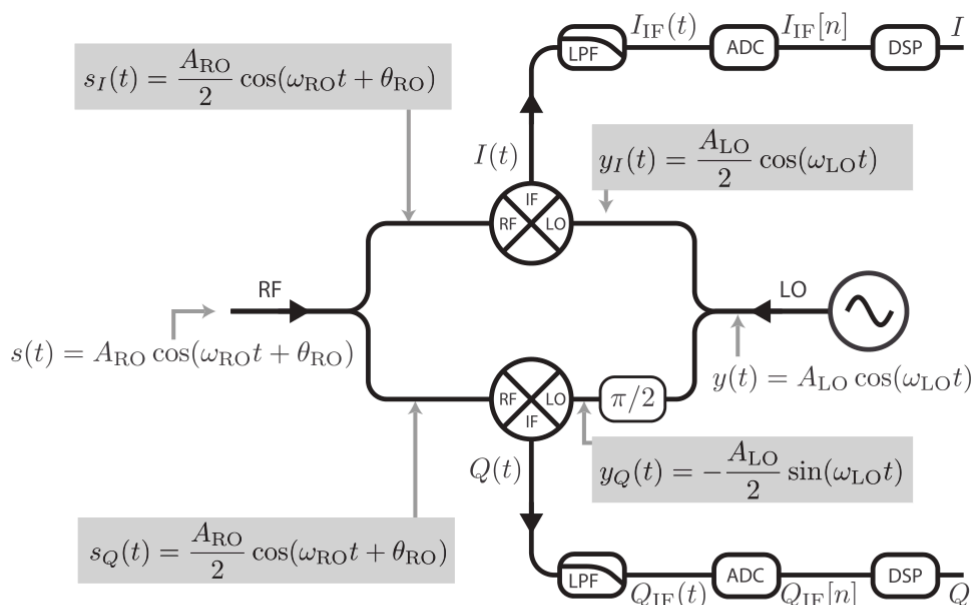


FIG. 21. Schematic of an I-Q mixer. A readout pulse at frequency ω_{RO} enters the RF port, where it is equally split into two paths. A local oscillator at frequency ω_{LO} enters the LO port, where it is equally split into two paths, one of which undergoes a $\pi/2$ -radian phase rotation. To perform analog modulation, the two signals in each path are multiplied at a mixer, yielding the outputs $I(t)$ and $Q(t)$, each having frequencies $\omega_{RO} \pm \omega_{LO}$. $I(t)$ and $Q(t)$ are then low-pass-filtered (time averaged) to yield $I_{IF}(t)$ and $Q_{IF}(t)$ at the intermediate frequency $\omega_{IF} = |\omega_{RO} - \omega_{LO}|$, and subsequently digitized using an analog-to-digital (ADC) converter. If $\omega_{IF} \neq 0$, then digital signals $I_{IF}[n]$ and $Q_{IF}[n]$ are further digitally demodulated using digital signal processing (DSP) techniques to extract the amplitude and phase of the readout signal.

两个关键信号进入混频器：

1. RF 信号：从谐振器反射回来的信号，包含量子比特状态信息，典型 5-10GHz，频率 ω_{RO} ；
2. LO 信号：本地振荡器产生的参考信号（频率 ω_{LO} ，和 RF 的 ω_{RO} 频率接近，典型 10-100MHz）；

混频器的操作：

1. 把 RF 信号分成两路，I 路和 Q 路；
2. 把 LO 信号也分成两路：I 路 LO 保持原相位，Q 路 LO 加一个 $\pi/2$ 相位，如果原 LO 是余弦信号，就变成正弦信号了；
3. 两路分别相乘：I 路 $RF \times I$ 路 LO，Q 路 $RF \times Q$ 路 LO；
4. 输出信号：相乘后会产生和频 ($\omega_{RO} + \omega_{LO}$) 和差频 ($\omega_{RO} - \omega_{LO}$ ，叫中频 IF)，再通过低通滤波器滤掉和频，只保留中频信号 (I_{IF} 和 Q_{IF})，这两个信号频率低，容易数字化。
5. 采用送入电脑：I 通道中频信号和 Q 通道中频信号 (I_{IF} 和 Q_{IF}) 频率低，可直接用 ADC 采样。

把 RF 信号比作带着密码的高频电波，LO 信号比作解码钥匙。混频器用钥匙把高频密码解成低频密码 (I_{IF} 和 Q_{IF})，方便后续处理。

2. 外差解调

从低频信号中提取量子态。

三步骤流程 (a - 模拟解调, b - 数据采样, c - 数字处理)

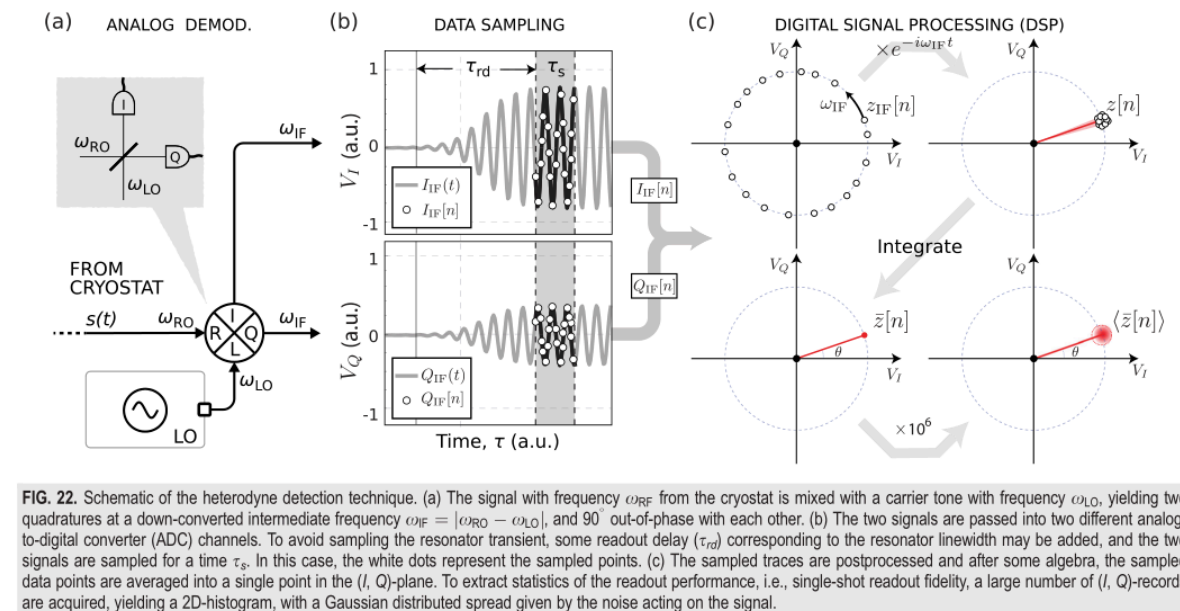


图 22a: 模拟解调, 把高频 RF 转成中频 IF。

流程和图 21 一致: RF 信号 (来自低温箱) 和 LO 信号混合, 输出 I_{IF} 和 Q_{IF} (中频, 一般几百 MHz);

作用: 把难以处理的高频微波信号 (GHz 级别) 转成低频信号, 用普通 ADC (模拟 - 数字转换器) 采样。

图 22b: 数据采样, 把模拟信号变成数字信号。

横轴是时间, 纵轴是信号幅度;

曲线: I_{IF} 和 Q_{IF} 的模拟信号 (随时间振荡);

白色圆点: ADC 的采样点。不是全程采样, 要避开刚加脉冲时的振铃, 等谐振器稳定后, 在一段时间窗口内采样;

为什么要等稳定? 刚加探测脉冲时, 谐振器的信号还在波动, 没达到稳定共振状态, 采样会有误差; 等波动消失后采样, 数据更准。

图 22c: 数字信号处理, 最终确定量子态。

第一步: 把采样得到的数字信号 ($I_{IF}[n]$ 、 $Q_{IF}[n]$) 和数字参考信号 (和 LO 同频率的余弦 / 正弦信号) 相乘, 再平均。这一步会把中频信号转成 DC (直流) 信号, 得到一个 I 值和一个 Q 值;

第二步: 把多次测量的 I/Q 值画在 I-Q 平面, 形成两个聚类 (图 19c);

第三步: 电脑用阈值区分聚类, 就能判断每次测量的量子态。

3. 两种解调方式比较

外差 vs homodyne (零差)。常用外差法。(不深究了)

解调方式	原理	优势	劣势	应用场景
外差解调	LO 与 RO 有中频差 (IF>0)	1. 抗低频噪声（避免 1/f 噪声）；2. 支持频率复用（多比特用不同 IF，无干扰）	电路复杂（需额外处理 IF 信号）	多量子比特读出（如 10 + 比特处理器）
Homodyne 解调	LO 与 RO 频率相同 (IF=0)	电路简单（直接输出 DC 信号）	1. 易受低频噪声影响；2. 无法复用（多比特信号均为 DC，无法区分）	单量子比特测试（如 qubit 校准）

外差解调：LO 频率和 RF 频率有一个小差值（中频 IF），适合同时读多个量子比特（每个量子比特对应不同的 IF，不会互相干扰）；

Homodyne 解调：LO 频率和 RF 频率完全相同，输出是 DC 信号，但容易受低频噪声影响，且不能同时读多个量子比特。

C.弱测量 vs 强测量：噪声的影响

量子读出的很怕噪声。环境中的随机波动会让 I-Q 平面的点群扩散，如果扩散太厉害， $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的点会重叠，就没法区分状态了。

1. 采样时间决定测量强度

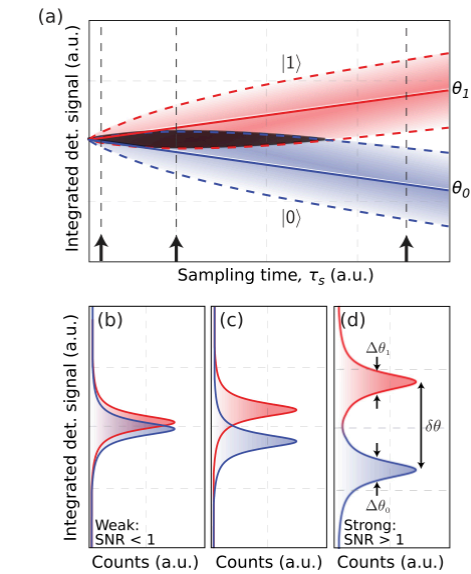


FIG. 23. (a) Qubit state distribution throughout the course of sampling the readout signal in the presence of noise. The separation between the peaks (solid lines) increases linearly in time, whereas the peak widths only increase as \sqrt{t} . Image inspired by Clerk *et al.* [24]. The three black arrows represent line cuts for three sampling times: (b) For short sampling time, the states are not separated, resulting in a weak measurement (SNR < 1). (c) After a longer sampling time, the peaks start to get separated, (d) finally getting fully resolved, resulting in a strong measurement (SNR > 1).

图 23a：状态分离随时间的变化

横轴是采样时间，纵轴是 I-Q 平面上 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的距离（分离度）；

实线： $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的分离度随时间 T_s 线性增加，采样时间越长，积累的状态信息越多，分离越开；

虚线：点群的扩散程度（噪声导致）随时间的平方 $\sqrt{T_s}$ 根增加。噪声是随机的，积累速度比信号慢；

随着采样时间增加，分离度会超过扩散程度，测量准确度从弱变强。

图 23b: 弱测量, 采样时间短, $SNR < 1$

- 蓝色 / 红色曲线代表 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的信号分布。两个曲线几乎重叠, 没法区分;
- 为什么叫弱测量? 因为采样时间太短, 获取的状态信息太少, 噪声掩盖了信号, 信噪比 $SNR < 1$, 只能知道量子态的部分信息。例如: 可能是 $|0\rangle$, 但不确定。

图 23c: 过渡状态, 采样时间中等

$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的分布开始分开, 但还有部分重叠。能大致判断状态, 但偶尔会出错。

图 23d: 强测量, 采样时间足够长, $SNR > 1$

$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的分布完全分开, 几乎没有重叠。能明确判断量子态, 出错率很低;

什么叫强? 采样时间足够长, 信号超过噪声 ($SNR > 1$), 能获取量子态的完整信息, 测量后量子态会坍缩到 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$, 不会再是叠加态。

2. 单次读出

Single-shot readout

定义: 一次测量就能准确判断量子态, 不用重复测, 这是量子计算的基本要求。因为如果每次都要重复测, 效率太低。

怎么实现? 需要足够高的信噪比, $SNR \geq 2$ (信号分离度至少是噪声扩散度的 2 倍)。这就需要后面讲的参数放大器 (放大信号) 和 Purcell 滤波器 (减少噪声)。

3. 噪声的来源

量子噪声: 微波光子的固有波动 (量子力学允许的最小噪声 $\hbar\omega/2$);

经典噪声: 放大器的热噪声 (HEMT 放大器约 2K 噪声温度)、线路的电磁干扰, 制冷机振动等;

怎么量化噪声? 用系统噪声温度量化。一般来说, 温度越低, 噪声越少。

公式为 $T_{sys} = T_{N1} + \frac{T_{N2}}{G1} + \frac{T_{N3}}{G1G2} + \dots$ (T_{N1} 为第一级放大器噪声温度, $G1$ 为其增益);

第一级放大器的噪声起主导作用 (参数放大器 T_{sys} 接近量子极限, 约 0.1K)。

4. 读出保真度计算

分离误差 ϵ_{sep} : 因噪声导致的误判概率, 公式为 $\epsilon_{sep} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{SNR}{2}\right)$ (erfc 为互补误差函数);

总保真度 F : 需考虑量子比特退相干 (读出时间 τ_{ro} 内, $|1\rangle$ 态可能弛豫到 $|0\rangle$), 公式为 $F = 1 - \epsilon_{sep} - e^{-\tau_{ro}/T1}$ ($T1$ 为量子比特能量弛豫时间);

目标: 单次读出保真度需 ≥ 0.99 , 之后方便用纠错码。

D. Purcell 滤波器

读出系统有个矛盾: 读的要快, 就得让谐振器的带宽宽一点, 但带宽太宽会让量子比特更快退相干。这就是 Purcell 效应。打个比方, 量子比特像一个装满水的杯子, 谐振器像管子。管子越粗 (带宽越宽), 水漏得越快 (量子比特能量丢得越快)。

1. Purcell 效应

如果量子比特和环境之间有通路（例如量子比特和周围的50Ω 的传输线之间接了个谐振器），量子比特的能量会通过这个通路快速辐射到环境中，导致退相干（ T_1 时间变短）；

2. Purcell滤波器效果

从无保护到完美保护示意图

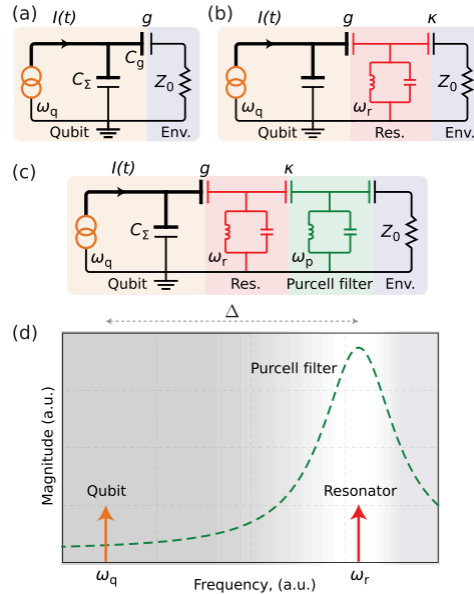


FIG. 24. (a) Circuit representation of the qubit (orange) coupled to an environment (blue) with a load resistor, Z_0 , via a capacitor C_g . To study the decay rate, the Josephson junction has been replaced with a current source, $I(t)$. (b) By adding a resonator (red) with frequency ω_r in-between the qubit and the 50 Ω environment, we get the case found in a regular dispersive readout. (c) A Purcell-filter (green) is added to the circuit, providing protection for the qubit, while allowing the resonator field to decay fast in the environment. (d) Transmission spectrum of a Purcell filter (dashed green), centered around the resonator frequency (red arrow), whereas the qubit frequency (orange arrow) is far detuned.

图 24a：没有保护的情况

qubit 直接连环境

量子比特（橙色的圈）通过电容 C_g 直接连到环境（蓝色env, $Z_0, 50\Omega$ 电阻）；量子比特的能量会通过 C_g 直接辐射到环境，退相干快；同时读出信号也能传出去，但代价是量子比特不稳定。

图 24b：加了谐振器的情况

在量子比特和环境之间加一个谐振器（红色 Res.）；

谐振器在自己的频率（ ω_r ）处阻抗低,信号能传出去，在量子比特的频率（ ω_q ）处阻抗高,量子比特的能量不容易漏出去；

谐振器的阻抗高的频率范围不够窄，还是会有部分能量泄漏。

图 24c：加了 Purcell 滤波器的情况

在谐振器和环境之间再加一个Purcell 滤波器（绿色）；

作用：滤波器在谐振器频率 ω_r 处阻抗低，读出信号能顺利传出去，在量子比特频率 ω_q 处阻抗极高，几乎完全阻断量子比特和环境的通路；

既保证读出信号传得快，谐振器带宽宽大，又让量子比特的能量几乎不漏，退相干慢，解决了快和稳的矛盾。

图 24d：滤波器的传输谱

解释了为什么能阻断

横轴是频率，纵轴是传输系数；

绿色虚线：Purcell 滤波器的传输谱。在 ω_r 处传输系数高，信号能过，在 ω_q 处传输系数几乎为 0，信号过不去，量子比特能量也漏不出去；滤波器的通带刚好对准谐振器的频率，阻带对准量子比特的频率。

3. Purcell 滤波器的常见设计

四分之一波长短截线，低 Q 带通滤波器，阶梯阻抗滤波器。

设计类型	原理	优势	劣势	应用场景
四分之一波长短截线	利用微波在传输线中的反射，形成特定频率的阻带	结构简单，易集成	阻带窄，仅适配单个量子比特频率	单量子比特实验
低 Q 带通滤波器	Q 值低（带宽宽），通带覆盖谐振器频率，阻带覆盖量子比特频率	可同时保护多个量子比特（阻带宽），兼作量子总线	插入损耗稍高（约 0.5dB）	多量子比特处理器（如表面码架构）
阶梯阻抗滤波器	交替改变传输线的阻抗（高 / 低），形成周期性阻带	阻带多，可适配多个量子比特频率	设计复杂，对工艺精度要求高	大规模量子处理器（100 + 比特）

E.参数放大器

读出信号非常弱，只有几个微波光子，直接测量会被噪声掩盖。我们需要用放大器把信号放大。但普通放大器会加很多噪声，而参数放大器PA能实现量子极限放大，只加最少的噪声。图 25（相位不敏感放大）、图 26（相位敏感放大）、图 27 (JPA) 和图 28 (TWPA) 讲清了放大器的原理和类型。

1. 为什么不能无噪声放大？

量子力学限制：任何放大器放大信号时，至少要加半个光子的噪声($\hbar\omega/2$ per bandwidth)，这是海森堡不确定性原理的要求；

普通放大器（比如 HEMT）：会加很多噪声（大致在10-20 个光子），信噪比反而下降；

参数放大器：加的噪声接近半个光子，能有效提升信噪比，适合量子读出。通过非线性元件（约瑟夫森结）和“泵浦信号（提供能量）实现放大，能有效提升信噪比（从 SNR=0.5 升至 SNR=3）。

2. 相位不敏感放大

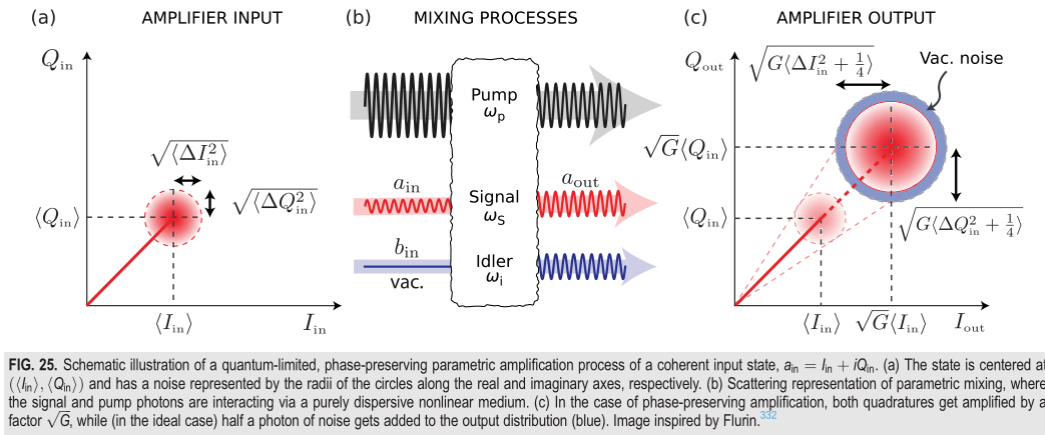


图 25a: 输入信号是 I-Q 平面上的一个红色的点，周围有噪声，用红色圆圈表示；

图 25b: 放大过程。通过pump信号（黑色，提供能量，所以输出会变小）和非线性元件（约瑟夫森结），把输入信号的 I 和 Q 分量同时放大，放大倍数 \sqrt{G} ；

图 25c: 表示输出信号。I 和 Q 都变大（右上平移了），噪声也会放大（红晕扩大，而且多了一个 vac.noise），但信号放大的比例比噪声高，信噪比提升；

特点：对 I 和 Q 的放大一样，不影响相位，但加的噪声稍多，接近 1 个光子，适合通用读出。

3. 相位敏感放大

仅放大特定相位的信号

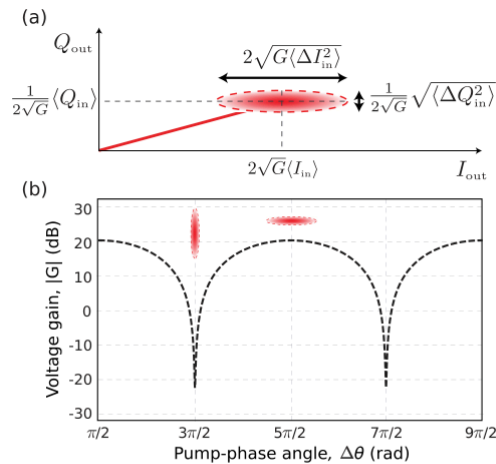


图 26a: 放大时只放大 I 分量，抑制 Q 分量，或反之。噪声会在一个方向被抑制。信号变扁。

图 26b: 放大倍数随pump相位周期性变化。通过调整pump的相位，能选择放大哪个分量。

特点：加的噪声更少，接近半个光子，但需要精确控制泵浦相位，且只能放大一个分量，不适合通用读出。

4. 约瑟夫森参数放大器 (JPA)

JPA示意图如图27。

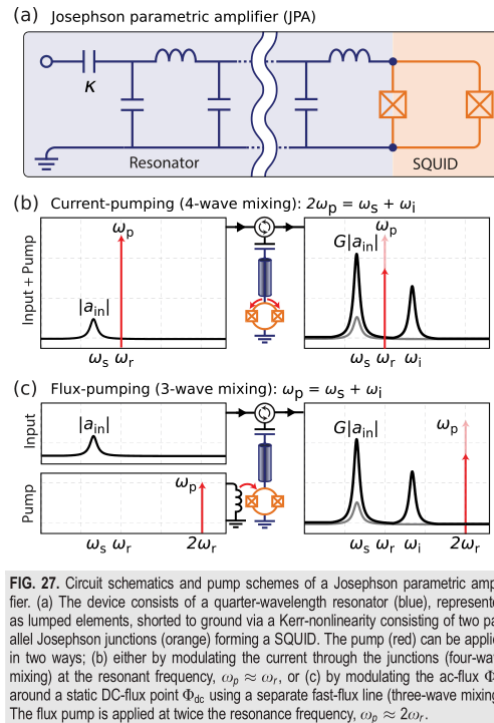


图 27a: 电路结构。一个谐振器，蓝色resonator，里面加一个 SQUID(由两个约瑟夫森结构成，橙色，提供非线性)

图 27b、c: 两种pump方式:

1. 电流泵浦 (4 波混合): pump频率 \approx 谐振器频率, $\omega_p \approx \omega_r$ 适合单量子比特; 通过调制结电流实现放大, 适合单量子比特。
2. 磁通泵浦 (3 波混合): pump频率 $\approx 2 \times$ 谐振器频率, $\omega_p \approx 2\omega_r$, 噪声更少; 通过调制 SQUID 的磁通实现放大, 噪声更低。

JPA应用分析

- **性能指标:** 增益 15-25dB, 噪声温度 0.1-0.5K, 带宽 10-50MHz;
- **优势:** 噪声极低, 适合单量子比特高精度读出;
- **劣势:** 带宽窄, 一次仅能放大一个量子比特的信号, 多比特需多个 JPA, 成本高

5.行波参数放大器 (TWPA)

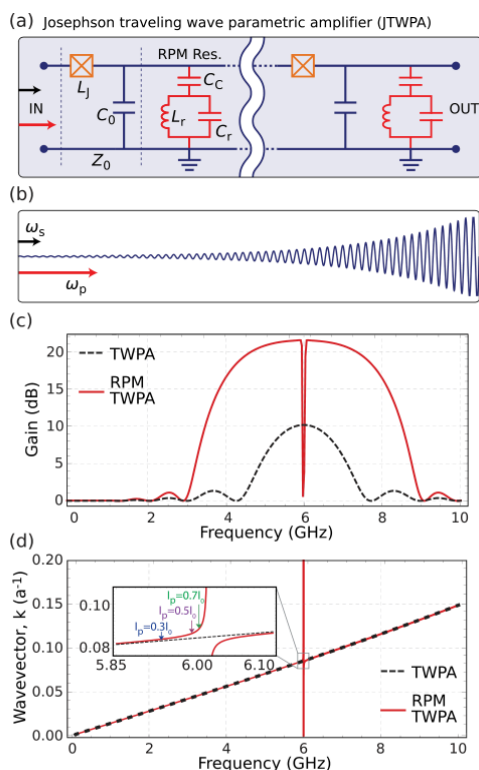


FIG. 28. (a) Simplified circuit representation of a Josephson traveling wave parametric amplifier (JTWPA). The characteristic impedance for each unit cell is set by the in-line Josephson inductor, L_J (orange) and the shunt capacitor, C (blue). A resonant LC-circuit (red) is used to phase match the four-wave amplification process. (b) Schematic of how the signal gets amplified in each unit cell as it propagates through the device. (c) Gain vs frequency for a JTWPA, with and without the resonant phase matching (RPM). (d) Dispersion relation of the TWPA, where the LC-resonators collectively open up a stopband at the resonant frequency. By applying the pump close to this frequency, the wave vector of the pump can be set to obtain a phase-matching. The optimal pump frequency depends on the pump power, as indicated in the inset. Image courtesy of Kevin O'Brien.

图 28a: 电路核心。无谐振器，由数百个单元组成（每个单元含约瑟夫森结和电容），形成“超导传输线”；

图 28b: 信号传输：输入信号沿传输线传播，每个单元通过泵浦信号（蓝色）提供能量，逐步放大信号（就像<）；

图 28c: 带宽优势：TWPA 的带宽宽（200-500MHz），可同时放大多个量子比特的信号（可10 个比特共用一个 TWPA）；

图 28d: 相位匹配：通过共振相位匹配（RPM）结构，周期性添加小谐振器，使泵浦信号与输入信号传播速度一致，放大均匀；

TWPA应用分析

- **性能指标**：增益 20-30dB，噪声温度 0.5-1K，带宽 200-500MHz；
- **优势**：带宽宽，适合多量子比特读出（大规模处理器的首选）；
- **劣势**：噪声比 JPA 稍高，但可通过主动抵消技术优化至 0.3K。

6.放大器的级联设计

实际读出系统中，放大器需级联使用，以平衡噪声和增益。

系统总噪声由第一级放大器决定（公式 $T_{sys} = T_{N1} + T_{N2}/G1 + \dots$ ），因此第一级必须用低噪声的参数放大器。

第一级：参数放大器（JPA/TWPA，低温 10-20mK 区）—— 噪声最低，负责初步放大信号（提升至可检测水平）；

第二级：HEMT 放大器（4K 区）—— 增益高（30dB），负责进一步放大信号；

第三级：室温放大器 —— 增益中等（20dB），将信号放大至数字化仪可采样水平；

小结

核心是如何把量子比特的隐形状态，变成能看到的经典信号：

- 1. **色散读出：**通过量子比特对谐振器频率的影响，反推量子态。图 19 是核心，量子比特→谐振器频率→I-Q 点群”的逻辑；
- 2. **信号测量：**用 I-Q 混频器（图 21）和外差解调（图 22），把高频信号转成可处理的数字信号；
- 3. **噪声与测量强度：**采样时间够长=强测量，能区分 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ （图 23），单次读出需要高信噪比；
- 4. **硬件优化：**Purcell 滤波器（图 24）解决快读 和 稳的矛盾，参数放大器（图 25-28）提升信噪比，两者都是量子读出的必备硬件。
- 5. **核心指标：**单次读出保真度 ≥ 0.99 ，读出时间 $\tau_{ro} \ll T_1$ ，避免退相干导致误判。

六、总结与展望

这章既总结了前面几章量子比特设计、噪声、控制、读出的核心进展，还展望了未来超导量子计算的发展方向。

A：量子退火

(Quantum Annealing)

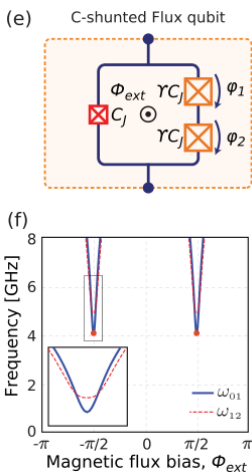
量子退火和我们之前讲的门模型量子计算不一样，它是另一种量子计算范式，核心是找最优解。

1.量子退火是什么

对于一个复杂的问题求解，要找到对应优化问题的最优解。经典优化像盲人下山，只能慢慢摸，容易困在局部最优解；而量子退火可以利用量子力学的效应，更快找到真正的全局最优解。

2.超导量子比特如何实现量子退火？

用磁通量子比特：



磁通量子比特的电路结构有三个约瑟夫森结，形成回路，能通过外部磁通控制量子态这种量子比特的频率随磁通变化，在磁通简并点 $\Phi_{ext} = \pi$ 处，量子比特对磁通噪声最不敏感，相干时间最长，适合退火操作。

3.量子退火的过程？

1. 初始时，让量子比特处于量子叠加。
2. 慢慢调整外部磁通，让量子比特的量子特性减弱，逐渐过渡到经典状态；
3. 最终量子比特会坍缩到能量最低的状态。这个状态就是优化问题的最优解。

4.进展与挑战

商业化案例是公司 D-Wave 用超导磁通量子比特，已经做出超过 2000 个量子比特的量子退火处理器（文档里提到 beyond 2000 qubits）；有个关键挑战：如何证明量子退火比经典优化更快，目前只在少数特定问题上看到优势，通用问题的加速还需要更多研究。文档建议想深入的话，可以看 Refs. 392–394，里面有量子退火的基准测试方法。

B.基于腔的量子信息处理

Cavity based QIP

文章讲的是用 3D 腔提升量子比特性能。前面章节讲的transmon 量子比特是平面结构，而基于腔的 QIP 是另一种架构：把量子信息编码在3D 微波腔的光子模式里，如“猫态”，而不是直接编码在约瑟夫森结的量子态里。

1.3D 腔有更长的相干时间

什么是 3D 腔？就是一个金属制成的 3D 空腔（比如圆柱形），能困住微波光子，类似回音壁，光子在腔里反射时损失很少。

为什么相干时间长？平面量子比特的相干时间容易受表面损耗影响（金属表面的缺陷），而 3D 腔的品质因数Q 极高，光子能在腔里待上几百微秒甚至毫秒，对应的量子比特相干时间也更长。

2.猫态编码

猫态是什么？猫态就是两个相反经典状态的叠加。 $|0 \text{ 个光子} \rangle + |N \text{ 个光子} \rangle$ （N 是偶数，比如 2、4）？

猫态对单光子损失不敏感，即使丢一个光子，还能通过剩下的光子恢复状态，天生带有误差保护；

进展：

1. 延长逻辑比特寿命，把猫态编码在 3D 腔里，逻辑比特的寿命已经超过了组成它的约瑟夫森结；
2. 实现逻辑门，在 3D 腔里实现了逻辑比特的 CNOT 门、Ramsey 干涉；
3. 不对称纠错，因为猫态的误差主要是光子损失，类型单一，可以用更简单的纠错码，硬件开销更小。
4. 为什么这个方向重要？

平面量子比特要做大规模，需要解决相干时间短的问题，而 3D 腔架构能从根本上提升相干时间。未来可能和平面量子比特结合，形成混合架构，平面比特做计算，3D 腔做存储。

C.低温技术与软件开发

前面讲的量子比特控制、读出，都离不开硬件环境和软件工具。这部分是大规模量子计算的基建，文档里重点讲了两方面：

1.低温技术

稀释制冷机 (Dilution Refrigerator) 能把温度降到 10 毫开 (mK) , 接近绝对零度 (-273.15°C) ;

为什么要这么冷? 温度越高, 环境中的热噪声越多, 量子比特的相干时间越短, 例如20mK 时, 热噪声导致的退相干可以忽略;

稀释制冷机已经是商用产品, 但挑战在于大规模信号接入。100 个量子比特需要几百根控制线, 如何把这些线引入制冷机, 又不引入额外热量和噪声?

解决办法有很多。

1. 3D 集成: 把量子比特芯片和控制电路叠起来, 减少线路长度;
2. 超导互连: 用超导材料做控制线, 减少电阻发热;
3. 集成滤波器: 在制冷机内部加滤波器, 过滤外部噪声。比如前面第五章讲的 Purcell 滤波器就可尝试一下。

2.软件开发

量子比特不能自己干活, 需要软件来生成控制脉冲、编译量子算法。文档里提到了几类关键软件:

- (1) 控制软件: 直接和硬件交互

可以生成微波脉冲, 控制量子比特的旋转和读出; 国外的有: QCoDeS、pyCQED、Labber。这些工具能自动校准量子比特的频率、脉冲幅度, 减少人工操作;

- (2) 编译软件: 把量子算法翻译成硬件能懂的语言

比如写了一个分解大数的量子算法, 编译软件会把它转换成X 门、CNOT 门的序列, 还会根据硬件的量子比特连接方式, 优化序列, 减少错误。Qiskit (IBM) 、Cirq (Google) 、Forest (Rigetti) 等等, 这些软件还能模拟量子电路, 在经典计算机上先测试算法;

3.现状与挑战

硬件挑战: 线路太多。1000 个量子比特可能需要上万根控制线, 目前的制冷机还装不下; 软件挑战: 编译效率低。大规模量子电路的编译时间长, 有些硬件擅长 CPHASE 门, 有些擅长 CR 门, 所以还需要适应不同硬件的native 门。

D.量子纠错

Quantum Error Correction

前面讲的量子比特都有误差。逻辑门的保真度 99%, 意味着每 100 个门就有 1 个错; 量子比特的相干时间只有 100 微秒, 操作慢了状态就丢了。而量子纠错就是用多个物理比特保护 1 个逻辑比特, 解决这些问题。

1.量子纠错的意义

量子纠错用多个物理比特的冗余信息, 纠正单个比特的错误。

2. 纠错码

纠错码也可叫表面码。

优点：

1. 容错阈值高。只要物理门的保真度超过 99%，就能通过纠错让逻辑门的保真度接近 100%；前面第四章讲的 CPHASE 门已经达到 99.4%，就可以用纠错提高保真率。
2. 只要近邻耦合。量子比特排列成 2D 网格，每个比特只和旁边的比特作用，适合平面芯片的制造。

第四章 F 部分提到，用 CPHASE 门实现了表面码的 stabilizer 测量，已经演示了 5 比特重复码，就是用 5 个物理比特保护 1 个逻辑比特，错误抑制效果随物理比特数增加而提升。

3. 目前的挑战

- (1) 逻辑比特寿命短。还没实现逻辑比特的寿命超过物理比特。假如说，物理比特的 T_1 是 100 微秒，逻辑比特因为需要频繁纠错，寿命反而只有 50 微秒。
- (2) 魔法态蒸馏 (Magic State Distillation)。表面码不能实现通用量子门（如 T 门），需要额外的“魔法态”来补充，但魔法态容易出错，需要用多个物理比特蒸馏出高保真的魔法态；
- (3) 远程纠缠。如何让两个分开很远的量子处理器产生纠缠，实现量子网络呢？目前还在实验室阶段。

E：量子计算优越性

Quantum Error Correction

量子计算优越性，也叫“量子霸权”。指量子计算机能解决经典计算机在合理时间内无法解决的问题。这是证明量子计算价值的关键里程碑，文档里重点讲了进展和目标。

1. 优越性的体现

不是分解大数 (Shor 算法)，而是随机量子电路采样：

实验机理是让量子比特执行一系列随机的逻辑门，然后测量输出状态的概率分布。经典计算机要模拟这个分布，需要的时间会随量子比特数指数增长，可能 50 个量子比特，经典计算机就需要几万年；

这个问题不需要实用价值，只需要“经典模拟难”，就行用来证明量子计算的速度优势。

2. 当前进展。

2018 年实验用了 9 个可调谐 transmon 量子比特（也就是第四章讲的 split transmon），实现了随机电路采样，虽然量子比特数少，但证明了思路可行。未来的目标是：预计用 50-100 个高保真量子比特（门保真度 > 99.5%，相干时间 > 100 微秒），就能实现经典计算机无法模拟的采样任务。目前谷歌、IBM、中科院和咱中科大等都在朝这个目标推进。

3. 里程碑的意义

为什么这个里程碑重要？可以证明量子计算的独特价值。如果能实现优越性，就说明量子计算机不是经典计算机的升级版，而是能做经典计算机做不到的事；为了实现优越性，需要解决量子比特的保真度、相干时间、大规模控制等一系列问题，会带动整个超导量子技术的进步。

小结

第六章没有讲太多新的内容，而是把前面的内容串起来，讲了超导量子比特已经做到什么程度，未来要往哪里走的几个问题。

1. **量子退火**: 用磁通量子比特解决优化问题, D-Wave 已经做了 2000 + 比特的处理器, 但还需要证明通用加速;
2. **3D 腔 QIP**: 用高 Q 腔的猫态编码, 提升量子比特寿命, 适合做量子存储;
3. **基建保障**: 低温技术要解决多线路散热, 软件要优化 脉冲生成和算法编译;
4. **量子纠错**: 表面码是目前最有希望的方案, 但需要突破 “逻辑比特寿命” 和 “魔法态蒸馏”;
5. **量子优越性**: 50-100 个高保真量子比特能实现, 是量子计算的关键里程碑。

目前超导量子计算已经从实验室玩具走向中等规模实用化, 未来的核心就是提升比特质量、扩大比特数量、完善基建和纠错。

这些方向共同指向大规模通用量子计算机”的终极目标。

七、参考文献

1. KRANTZ P, KJAERGAARD M, YAN F, et al. A quantum engineer's guide to superconducting qubits[J]. Applied Physics Reviews, 2019, 6(2): 021318.
2. CHEN Z. Metrology of quantum control and measurement in superconducting qubits[D]. Santa Barbara: University of California, 2018.
3. SU F F, YANG Z H. Josephson effect and the basic physical principles of superconducting quantum circuits[J]. Physics and Engineering, 2021, 31(5): 28-33.
4. SU F F, YANG Z H. Principle of superconducting qubits coupling and their measurement and control[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(4): 210-217, 228.
5. MCKAY D C, WOOD C J, SHELDON S, et al. Efficient Z-gates for quantum computing[J]. Physical Review A, 2017, 96(2): 022330.
6. XU H K, LIU W Y, LI Z Y, et al. Realisation of adiabatic and diabatic CZ gates in superconducting qubits coupled with a tunable coupler[J]. arXiv:2010.14053, 2020.
7. YAN F, KRANTZ P, SUNG Y, et al. A tunable coupling scheme for implementing high-fidelity two-qubit gates[J]. arXiv:1803.09813v1, 2018.
8. PATTERSON A D, RAHAMIM J, TSUNODA T, et al. Calibration of a cross-resonance two-qubit gate between directly coupled transmons[J]. Physical Review Applied, 2019, 12(6): 064013.
9. CHOW J M, GAMBETTA J M, TORNBERG L, et al. Calibration of a cross-resonance two-qubit gate between directly coupled transmons[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(9): 090502.
10. MAGESAN E, GAMBETTA J M, EMERSON J. Scalable and robust randomized benchmarking of quantum processes[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(18): 180504.
11. EMERSON J, ALICKI R, ZYCZKOWSKI K J. Scalable noise estimation with random unitary operators[J]. Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2005, 7(4): S347-S356.
12. KNILL E, LEIBFRIED D, REICHLER R, et al. Randomized benchmarking of quantum gates[J]. Physical Review A, 2008, 77(1): 012307.
13. KNILL E. Quantum computing with realistically noisy devices[J]. Nature, 2005, 434(7035): 39-44.
14. LÉVI B, LÓPEZ C C, EMERSON J, et al. Efficient error characterization in quantum information processing[J]. Physical Review A, 2007, 75(2): 022314.
15. RAUSSENDORF R, HARRINGTON J. Fault-tolerant quantum computation with high threshold in two dimensions[J]. Physical Review Letters, 2007, 98(19): 190504.

16. MAGESAN E, GAMBETTA J M, JOHNSON B R, et al. Efficient measurement of quantum gate error by interleaved randomized benchmarking[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(8): 080505.
17. MORVAN A, RAMASESH V V, BLOK M S, et al. Qutrit randomized benchmarking[J]. Physical Review Letters, 2021, 126(21): 210504.
18. SU F F, YANG Z H, ZHAO S K, et al. Fabrication and characterization of superconducting multiqubit device with niobium base layer[J]. Chinese Physics B, 2021, 30(10): 100304.
19. NISKANEN A O, HARRABI K, YOSHIHARA F, et al. Quantum coherent tunable coupling of superconducting qubits[J]. Science, 2007, 316(5824): 723-726.
20. BLAIS A, HUANG R S, WALLRAFF A, et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation[J]. Physical Review A, 2004, 69(6): 062320.
21. CASPARIS L, PEARSON N J, KINGHOJ A, et al. Voltage-controlled superconducting quantum bus[J]. Physical Review B, 2019, 99(8): 085434.
22. GAMBETTA J M, CHOW J M, STEFFEN M. Building logical qubits in a superconducting quantum computing system[J]. npj Quantum Information, 2017, 3(1): 2.
23. ORLANDO T P, TIAN L, MAZO J J, et al. Superconducting persistent-current qubit[J]. Physical Review B, 1999, 60(14): 15398-15413.
24. CLARKE J, WILHELM F K. Superconducting quantum bits[J]. Nature, 2008, 453(7198): 1031-1042.
25. SONG C, XU K, CHEN K, et al. 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit[J]. Physical Review Letters, 2017, 119(18): 180507.